

А. И. ПОВОЛОЦКИЙ

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕСВЯЗНЫХ СПЕКТРОВ У НЕЛИНЕЙНЫХ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 2 IX 1954)

1. Ниже через E обозначается вещественное банахово пространство, θ — нуль этого пространства. Через A обозначается вполне непрерывный (как правило, нелинейный) оператор, действующий в E . Оператор A может быть определен во всем пространстве или в его части.

Число λ называют собственным значением оператора A , если существует такой элемент $x \in E$, $x \neq \theta$, что $Ax = \lambda x$. Вектор x при этом называют собственным вектором оператора A . Совокупность собственных значений оператора A образует его спектр Λ .

Через $\Pi_{r,R}$ будем обозначать шаровой слой $r < \|x\| < R$, через $\Lambda_{r,R}$ — ту часть Λ , точкам которой соответствуют собственные векторы из $\Pi_{r,R}$.

Если оператор линеен, то, как известно ⁽¹⁾, спектр его дискретен: он содержит не более счетного множества чисел, которые не могут иметь отличной от нуля предельной точки. У нелинейных операторов, наоборот, спектр, как правило, содержит интервалы. Для интегральных операторов

$$A\varphi(s) = \int_G K[s, t, \varphi(t)] dt \quad (1)$$

при некоторых специальных ограничениях, наложенных на функцию $K(s, t, u)$, это было доказано П. С. Урысоном ⁽²⁾. Для некоторых классов интегральных уравнений с аналитическими нелинейностями теоремы о существовании интервалов, принадлежащих спектру, установили А. И. Некрасов ⁽³⁾ и Н. Н. Назаров (см., например, ⁽⁴⁾).

В последние годы для изучения спектров М. А. Красносельским (см., например, ⁽⁵⁾) применялись топологические методы, основанные на использовании понятия вращения вполне непрерывного векторного поля, которое эквивалентно понятию степени отображения Лерея — Шаудера ⁽⁶⁾.

Естественно возникает вопрос о том, могут ли существовать нелинейные операторы, у которых спектр Λ несвязен, причем существует система интервалов, принадлежащих различным связным компонентам Λ . В настоящей заметке указывается класс таких операторов. Изучение спектров производится при помощи методов, разработанных в ⁽⁵⁾.

2. Пусть нелинейный оператор A удовлетворяет условию

$$\|Ax - Bx\| \leq K\|x\| \quad (x \in \Pi_{r,R}), \quad (2)$$

где B — линейный вполне непрерывный оператор.

Следуя М. А. Красносельскому, будем называть непрерывной ветвью $\mathfrak{N}_{(\alpha,\beta)}$ в слое $\Pi_{r,R}$ совокупность собственных векторов оператора A , отвечающих собственным значениям из (α, β) , если $\mathfrak{N}_{(\alpha,\beta)} \cap L \neq \emptyset$,

где L — граница любой ограниченной области G , содержащей шар $\|x\| \leq r$ и содержащейся в шаре $\|x\| < R$.

Теорема 1. Пусть каждое из n собственных значений $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ оператора B имеет нечетную кратность. Пусть

$$\mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \dots < \mu_{n-1} < \lambda_n < \mu_n,$$

причем числа μ_i ($i = 0, \dots, n$) не принадлежат спектру оператора B . Пусть, наконец,

$$l_i = \|(\mu_i I - B)^{-1}\|^{-1} - K > 0.$$

Тогда все интервалы $(\mu_i - l_i, \mu_i + l_i)$ ($i = 0, \dots, n$) не имеют точек из $\Lambda_{r,R}$, а каждый из интервалов $\Delta_i = (\mu_i + l_i, \mu_{i+1} - l_{i+1})$ ($i = 0, \dots, n-1$) содержит точки $\Lambda_{r,R}$, причем каждая $\mathfrak{N}_{\Delta_i}$ образует непрерывную ветвь в $\Pi_{r,R}$.

Утверждение теоремы сохраняет силу в случае, когда $r = 0, R = \infty$.

Расположение непрерывных ветвей $\mathfrak{N}_{\Delta_i}$ в пространстве E характеризуется теоремой 2.

Через $\mathcal{G}_{\lambda, m}$ обозначим множество таких точек $x \in E$, для которых

$$\rho(x, E_\lambda) = \inf_{e \in E_\lambda} \|x - e\| < m \|x\|,$$

где E_λ — подпространство собственных векторов оператора B , соответствующих собственному значению λ . Легко видеть, что существует положительная функция $\alpha(m)$ ($m > 0$) такая, что

$$\|\lambda x - Bx\| \geq \alpha(m) \|x\| \quad (x \in \mathcal{G}_{\lambda, m}).$$

Теорема 2. Пусть при каждом $i = 1, 2, \dots, n$

$$2K < \alpha(m) + \|(\mu_{i-j} I - B)^{-1}\|^{-1} - |\lambda_i - \mu_{i-j}| \quad (j = 0, 1).$$

Тогда каждая непрерывная ветвь $\mathfrak{N}_{\Delta_i}$ лежит в соответствующем $\mathcal{G}_{\lambda_i, m}$.

3. Ниже через B_θ обозначается производная Фреше оператора A в точке θ . Через B_∞ обозначается асимптотическая производная⁽⁵⁾ оператора A , т. е. такой линейный оператор, что

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|Ax - B_\infty x\|}{\|x\|} = 0.$$

Так как A вполне непрерывен, то операторы B_θ и B_∞ (если они существуют) также вполне непрерывны⁽⁵⁾.

Знание спектров линейных операторов B_θ и B_∞ позволяет для операторов, удовлетворяющих условию (2), указать интервалы, полностью принадлежащие Λ .

Теорема 3. Пусть оператор A удовлетворяет условию (2) во всем пространстве $\Pi_{0, \infty}$, причем

$$K < \min \{ \|(\lambda_0 - \varepsilon)I - B\|^{-1}; \|(\lambda_0 + \varepsilon)I - B\|^{-1} \}. \quad (3)$$

Пусть в $(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ есть только одно простое собственное значение λ_0 оператора B , единственное собственное значение μ оператора B_θ и единственное собственное значение ν оператора B_∞ . Тогда

$\mathfrak{N}_{(\lambda_0-\varepsilon, \lambda_0+\varepsilon)}$ образует непрерывную ветвь в $\Pi_{0,\infty}$, причем соответствующая ей часть Λ содержит полностью интервал (μ, ν) .

Объединяя выводы теорем 1 и 3, можно утверждать, что для нелинейных операторов, удовлетворяющих условию (2) в $\Pi_{0,\infty}$ с достаточно малой константой K , спектр Λ , как правило, несвязен и содержит интервалы, принадлежащие различным его связным компонентам. При этом чем меньше число K , тем большее число таких компонент может быть указано.

Полученные результаты проиллюстрируем на примере нелинейного интегрального оператора вида

$$A\varphi(s) = \int_G K(s, t) f(\varphi(t)) dt \quad (4)$$

с симметричным положительно-определенным ядром $K(s, t)$, удовлетворяющим условию

$$\iint_{GG} K^2(s, t) ds dt = 1.$$

Для простоты изложения будем считать $\text{mes } G = 1$. Относительно функции $f(u)$ ($-\infty < u < \infty$) будем предполагать, что она непрерывна.

Теорема 4. Пусть собственные значения $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ линейного оператора

$$B\varphi(s) = \int_G K(s, t) \varphi(t) dt,$$

действующего в L^2 , простые, причем в $[\lambda_1, \lambda_n]$ нет других собственных значений оператора B . Пусть

$$\mu_0 > \lambda_1 > \mu_1 > \lambda_2 > \dots > \mu_{n-1} > \lambda_n > \mu_n.$$

Пусть функция $f(u)$ удовлетворяет условиям:

- 1) $|u - f(u)| < 2a(u)$;
- 2) $f'(0) = 1$; $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} = 1 - a$,

где

$$a < \min_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=0, 1}} \left\{ \frac{1}{2} |\lambda_i - \mu_{i-j}|; 1 - \frac{\mu_i}{\lambda_i} \right\}.$$

Тогда интервалы $(\lambda_i, (1-a)\lambda_i)$ ($i = 1, \dots, n$) принадлежат различным связным компонентам спектра Λ оператора (4).

Функцией $f(u)$, удовлетворяющей условиям 1), 2) теоремы 4, может быть, например,

$$f(u) = (1-a)u + a \sin u.$$

4. Перейдем к изучению случая, когда точки спектра оператора B кратны.

Теорема 5. Пусть оператор A удовлетворяет условию (2) в некотором шаре $\Pi_{0,R}$. Пусть в $(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ есть единственное собственное значение λ_0 оператора B кратности α . Пусть K удовлетворяет условию (3).

Тогда $\lambda_0 - \varepsilon$ и $\lambda_0 + \varepsilon$ не являются точками спектра оператора B_0 , а сумма кратностей всех точек спектра B_0 , лежащих в $(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$, имеет ту же четность, что и α .

Аналогичное утверждение справедливо для оператора B_∞ , если условие (2) выполнено в некотором $\Pi_{r,\infty}$.

Как следует из теоремы 1, непрерывные ветви $\mathfrak{N}_{(\alpha, \beta)}$ оператора A ,

вообще говоря, выходят из θ и уходят в бесконечность. Однако в некоторых случаях существуют ветви $\mathfrak{N}_{(\alpha, \beta)}$, не выходящие из ограниченной части пространства.

Теорема 6. Пусть оператор A удовлетворяет условию (2) в $P_{0, \infty}$. Пусть K удовлетворяет условию (3), а $(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ не содержит отличных от λ_0 точек спектра оператора B .

Если при этом в $(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ нет точек спектра B_∞ , но содержится по крайней мере одно нечетно кратное собственное значение B_0 , то существует непрерывная ветвь $\mathfrak{N}_{(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)}$, которая не выходит из ограниченной части пространства.

В качестве примера нелинейного оператора, удовлетворяющего условию теоремы 6, приведем оператор, действующий в двумерной плоскости с координатной системой $\{x, y\}$ и заданный равенством:

$$A\{x, y\} = \begin{cases} \{x - \varepsilon y(x^2 + y^2); (1 + \varepsilon)y + \varepsilon x(x^2 + y^2)\} & \text{при } x^2 + y^2 \leq 1, \\ \{x - \varepsilon y; (1 + \varepsilon)y + \varepsilon x\} & \text{при } x^2 + y^2 \geq 1, \end{cases}$$

где $\varepsilon < 1/2$. Единственная непрерывная ветвь собственных векторов $\mathfrak{N}_{(1/2, 1/2)}$ этого оператора имеет уравнение $xy + (x^2 + y^2)^2 = 0$ и не выходит за пределы круга $x^2 + y^2 \leq 1/2$.

Аналогично можно доказать существование в некоторых случаях непрерывных ветвей $\mathfrak{N}_{(\alpha, \beta)}$, находящихся на положительном расстоянии от нуля θ банахова пространства.

5. Все изложенные выше утверждения применимы к изучению различных нелинейных интегральных операторов (например, вида (1)).

Акмолинский техникум
железнодорожного транспорта
Карагандинской железной дороги

Поступило
28 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ф. Рисс, Усп. матем. наук, в. 1 (1936). ² П. С. Урысон, Матем. сборн., 1 (43), № 5, 619 (1936). ³ А. И. Некрасов, Точная теория волн устоявшегося вида на поверхности тяжелой жидкости, М., 1951. ⁴ Н. Н. Назаров, Тр. Инст. матем. и мех. АН Уз.ССР, Ташкент, в. 4 (1948). ⁵ М. А. Красносельский, Исследования по нелинейному функциональному анализу, Диссертация, Киев, 1950. ⁶ Ж. Лерей, Ю. Шаудер, Усп. матем. наук, в. 13—14 (1946).