

В. И. ЗУБОВ

К ТЕОРИИ ВТОРОГО МЕТОДА А. М. ЛЯПУНОВА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 3 IX 1954)

§ 1. Постановка вопроса, определения. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

правые части которой заданы при любых значениях $x_i \in (-\infty, +\infty)$ и $t \in (-\infty, +\infty)$, удовлетворяют условиям, гарантирующим существование единственного решения, проходящего в момент $t = t_0$ через точку $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ при любых конечных значениях этих величин, и $f_i(0, 0, \dots, 0, t) = 0, i = 1, 2, \dots, n$, для всех значений $t \in (-\infty, +\infty)$.

Очевидное решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ системы (1) называют асимптотически устойчивым по Ляпунову, если по любому $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что как только $\sum_{i=1}^n x_i^2 < \delta^2$, так

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(t, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, t^0) < \varepsilon \quad \text{для всех } t \geq t_0$$

и

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(t, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, t^0) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Будем говорить, что точка $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, t^0)$ принадлежит области А асимптотической устойчивости очевидного решения $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ системы (1), если существует такое число $\alpha > 0$, что как только $\sum_{i=1}^n (x_i^0 - \bar{x}_i^0)^2 + (t_0 - \bar{t}_0)^2 < \alpha$, так $\sum_{i=1}^n x_i^2(t, \bar{x}_1^0, \dots, \bar{x}_n^0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, и если нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Область А является открытым и связным множеством, граница которого, как показал Н. П. Еругин⁽¹⁾, состоит из целых траекторий.

А. М. Ляпунов при помощи второго метода (т. е. при помощи так называемых функций Ляпунова) дал достаточное условие асимптотической устойчивости, которое, как показал К. П. Персидский⁽²⁾, в этом случае необходимо влечет устойчивость, равномерную по отношению $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, t)$. Это показало, что достаточный критерий А. М. Ляпунова не является универсальным и не может дать ответа в ряде случаев на поставленный вопрос.

Задача настоящей работы и состоит в том, чтобы дать в известном смысле необходимое и достаточное условие асимптотической устой-

чивости без требования равномерности и найти уравнение границы области A .

§ 2. Достаточные условия асимптотической устойчивости. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) + \frac{\partial V}{\partial t} = \\ = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \left[1 + \sum_{i=1}^n f_i^2 \right]^{1/2} (1 + V), \quad (2)$$

где φ — положительно-определенная функция, непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая условиям:

- 1) $\varphi(0, 0, \dots, 0) = 0$.
- 2) При заданном положительном δ_1 существует положительное $l^2(\delta_1)$ такое, что

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) > l^2 \text{ при } x^2 > \delta_1 > 0 \left(x^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \right). \quad (3)$$

Допустим, что удалось определить решение этого уравнения при всех x и t .

Теорема 1. Множество точек $1 + V = 0$ состоит из целых траекторий, определяемых системой (1).

Теорема 2. Если при некоторой функции $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющей указанным выше условиям, уравнение (2) имеет решение, обладающее свойствами:

а) $V(0, 0, \dots, 0, t) = 0$; $V(x_1, \dots, x_n, t)$ определенно отрицательная;

б) существует такое $\gamma > 0$, что $-1 < V(x_1, \dots, x_n, t) < 0$ при $0 < x^2 < \gamma$,

то невозмущенное решение (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Теорема 3. Если выполнены условия теоремы 2, то связанная компонента множества точек, определенных условиями

$$-1 < V(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \leq 0,$$

содержащая точку $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, является областью асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1).

Теорема 4. Если выполнены условия теоремы 2, то всякое решение, начинающееся в области $x^2 < \gamma$, обладает свойством

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(t, x_1^0, \dots, x_n^0, t^0) < L [B(t^0, x_1^0, \dots, x_n^0) \cdot (t - t_0)], \text{ где } L - \text{строгая убывающая функция, заданная от } -\infty \text{ до } +\infty, \text{ и } L_{t \rightarrow +\infty} \rightarrow 0; B - \text{положительная функция.}$$

Заметим, что L может быть дана конструктивно в зависимости от φ .

Замечание. Если выполнен достаточный критерий Ляпунова, то приведенные здесь условия выполняются автоматически. Однако обратное неверно, ибо в общем случае $V(x_1, \dots, x_n, t)$, приведенная здесь, не имеет бесконечно малого высшего предела.

§ 3. Необходимость приведенного выше условия. Пусть теперь очевидное решение системы (1) асимптотически устойчиво, причем, если начальные данные принадлежат области $x^2 < \delta$, то существует такая функция L , что $x^2 < L$ (L и B обладают теми же свойствами, что и в § 2).

Теорема 5. В этом случае существует φ , удовлетворяющая условиям § 2 и доставляющая единственное непрерывное решение

уравнения (2), определенное условием $V(0, 0, \dots, 0, t) = 0$, причем это решение существует во всей области A .

Если (1) не удовлетворяет условиям единственности во всем пространстве (исключая точку $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$), то уравнение (2) может допустить при заданной φ несколько решений, определенных условием $V(0, 0, \dots, 0, t) = 0$.

Теорема 6. *Предельные значения $V(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ при приближении к границе A изнутри равны -1 .*

Из этого следует, что границей области A служит множество точек, определенное уравнением $1 + V = 0$, ограничивающее связную компоненту множества $-1 < V \leq 0$, содержащую точку $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

§ 4. Другой вид критерия. Если уравнение

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) + \frac{\partial V}{\partial t} = W,$$

где W есть определенно-положительная функция, допускает в качестве решения определенно-отрицательную функцию, имеющую бесконечно малый высший предел, то, как показал А. М. Ляпунов, нулевое решение системы (1) будет асимптотически устойчивым.

Теорема 7. *Если*

$$W > l^2 \sqrt{1 + \sum_{i=1}^n f_i^2} \quad \text{при} \quad x^2 > \delta_1 > 0,$$

то при приближении к границе области A изнутри функция $V \rightarrow -\infty$.

Заметим, что уравнение (2) может быть упрощено, если имеется продолжимость любого решения на все значения $t \in (-\infty, +\infty)$.

Правая часть уравнения (2) выбрана таким образом, что его решение при приближении изнутри к границе области асимптотической устойчивости стремится к -1 . Однако, если ее взять в виде $C_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) + C_2(x_1, \dots, x_n, t)V$, то, располагаясь функциями C_1 и C_2 , можно добиться того, что предельные значения функции V при приближении изнутри к границе области A будут равны наперед заданной определенно-отрицательной функции.

Все сформулированные здесь предложения можно без труда перенести на случай, когда правые части системы (1) заданы в цилиндре $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D, t \in (\tau, +\infty)$, где D — некоторая область, содержащая начало координат, а величина $\tau < +\infty$.

После оформления настоящей заметки появилась в печати статья Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского⁽³⁾, в которой решен вопрос о существовании функции Ляпунова для случая равномерной устойчивости в целом. Теорема 5 устанавливает существование функции Ляпунова для любой области A без требования равномерности.

§ 5. Общий принцип установления асимптотической устойчивости и нахождения границы области A . Для определения асимптотической устойчивости наперед заданного типа

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(t, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, t^0) < L[B(x_1^0, \dots, x_n^0, t_0) \cdot (t - t_0)]$$

и отыскания области A можно рекомендовать следующий метод.

1. Построим функцию $\varphi_1(x^2)$, строго монотонную при $x^2 < \delta_1$, выбрав ее так, чтобы $\int_{t_0}^{+\infty} \varphi_1(L) dt < +\infty$.

2. Выберем функцию φ таким образом, чтобы она удовлетворяла условиям § 2, $\varphi \leq \varphi_1$ при $x^2 < \delta$ и была такой, чтобы можно было отыскать решение (2).

Если такое решение существует и удовлетворяет условиям теоремы 2, то задача об отыскании асимптотической устойчивости и области устойчивости решена.

В условиях § 2 требование $\varphi > l^2$ при $x^2 > \delta_1$ может быть ослаблено.

Поступило
21 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. П. Еругин, Прикладн. матем. и мех., 15, в. 2 (1951). ² К. П. Персидский, Усп. матем. наук, нов. сер., 1, в. 5—6 (1946). ³ Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский, Прикладн. матем. и мех., 18, № 3, 345 (1954).