

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Академик Н. Н. БОГОЛЮБОВ

**О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ ГРИНА — ШВИНГЕРА
ПРИ ПОМОЩИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ**

Рассмотрим динамическую систему, состоящую из полей фермионов и бозонов, взаимодействие между которыми характеризуется лагранжианом

$$L(x) = g \bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x) \varphi(x) + M(x). \quad (1)$$

Здесь Γ — вершинный фактор (например $\gamma_5 \tau$); $M(x)$ — лагранжиан, зависящий только от поля φ . $M(x)$ может включать член с «классическим источником»

$$J(x) \varphi(x) \quad (2)$$

и обычные контр-члены для ренормировки.

Как известно, динамические процессы в данной системе могут изучаться при помощи введенных Швингером функций Грина. Эти функции Грина в принятом представлении взаимодействия определяются выражениями вида

$$G(x, y) = \frac{i \langle T(\psi(x) \bar{\psi}(y) S) \rangle_0}{\langle S \rangle_0}, \quad (3)$$

$$G(x_1, x_2; y_1, y_2) = \frac{\langle T(\psi(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(y_1) \bar{\psi}(y_2) S) \rangle_0}{\langle S \rangle_0},$$

где $S = T(\exp i \int L(x) dx)$.

Целью настоящей статьи является получение «функциональных квадратур» для представления швингеровских функций Грина через обычную функцию Грина $G(x, y | \varphi)$ одного фермиона в классическом поле φ .

Заметим прежде всего, что в выражении (3) можем положить

$$\langle \dots \rangle_0 = \langle \langle \dots \rangle_{F_0} \rangle_{B_0}, \quad (4)$$

т. е. сначала произвести операцию усреднения по фермионному вакууму, а затем — операцию усреднения по бозонному вакууму.

Пусть $F(\varphi)$ будет каким-то функционалом от поля бозонов φ . Как теперь известно, можно ввести интеграл Фейнмана $\int F(\varphi) d\varphi$, взятый по функциональному пространству c -функций φ таким образом, что

$$\langle T(F(\varphi)) \rangle_0 = \int F(\varphi) d\varphi.$$

Поэтому, ввиду (4), из (3) получим:

$$G(x, y) = \frac{i \int \langle T(\psi(x) \bar{\psi}(y) \exp i \int \bar{\psi}(z) \Gamma \psi(z) \varphi(z) dz) \rangle_{F_0} \exp(i \int M(x) dx) d\varphi}{\int \langle T(\exp i \int \bar{\psi}(z) \Gamma \psi(z) \varphi(z) dz) \rangle_{F_0} \exp(i \int M(x) dx) d\varphi}. \quad (5)$$

Заметим, с другой стороны, что и для обычной функции Грина одного фермиона в классическом поле φ можем написать

$$G(x, y | \varphi) = \frac{i \langle T(\psi(x) \bar{\psi}(y) \exp i \int \bar{\psi}(z) \Gamma \psi(z) \varphi(z) dz) \rangle_{F_0}}{S_0(\varphi)}, \quad (6)$$

$$S_0(\varphi) = \langle T(\exp i \int \bar{\psi}(z) \Gamma \psi(z) \varphi(z) dz) \rangle_{F_0}.$$

Пусть λ — числовой параметр. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_0(\lambda \varphi)}{\partial \lambda} &= i \int \langle T(\bar{\psi}(x) \Gamma \psi(x) \exp i \lambda \int \bar{\psi} \Gamma \psi \varphi dz) \rangle_{F_0} \varphi(x) dx = \\ &= - \int \text{Sp } G(x, x | \lambda \varphi) \Gamma \varphi(x) dx \cdot S_0(\lambda \varphi); \quad S_0(0) = 1. \end{aligned}$$

Поэтому

$$S_0(\varphi) = \exp \left\{ - \int_0^1 d\lambda \int dx \text{Sp } G(x, x | \lambda \varphi) \Gamma \varphi(x) \right\} \quad (7)$$

и, ввиду (6):

$$\begin{aligned} i \langle T(\psi(x) \bar{\psi}(y) \exp i \int \bar{\psi}(z) \Gamma \psi(z) \varphi(z) dz) \rangle_{F_0} = \\ = G(x, y | \varphi) \exp \left\{ - \int_0^1 d\lambda \int dx \text{Sp } G(x, x | \lambda \varphi) \Gamma \varphi(x) \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставив (7) и (8) в (5), найдем окончательно

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \frac{\int G(x, y | \varphi) \exp \left\{ - \int_0^1 d\lambda \int dx \text{Sp } G(x, x | \lambda \varphi) \Gamma \varphi(x) - i \int M(x) dx \right\} d\varphi}{\int \exp \left\{ - \int_0^1 d\lambda \int dx \text{Sp } G(x, x | \lambda \varphi) \Gamma \varphi(x) + i \int M(x) dx \right\} d\varphi}, \\ G(x_1, x_2; y_1, y_2) &= \\ &= \frac{\int G(x_1, x_2; y_1, y_2 | \varphi) \exp \left\{ - \int_0^1 d\lambda \int dx \text{Sp } G(x, x | \lambda \varphi) \Gamma \varphi(x) + i \int M(x) dx \right\} d\varphi}{\int \exp \left\{ - \int_0^1 d\lambda \int dx \text{Sp } G(x, x | \lambda \varphi) \Gamma \varphi(x) + i \int M(x) dx \right\} d\varphi}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$G(x_1, x_2; y_1, y_2 | \varphi) = G(x_1, y_1 | \varphi) G(x_2, y_2 | \varphi) - G(x_2, y_1 | \varphi) G(x_1, y_2 | \varphi) *.$$

Как видно, швингеровские функции Грина, учитывающие радиационные поправки, могут быть получены путем усреднения обычных функций Грина по квантовым флуктуациям поля φ .

Интересно отметить, что множитель $\exp \left\{ - \int_0^1 d\lambda \int dx \text{Sp } G(x, x | \lambda \varphi) \Gamma \varphi(x) \right\}$ соответствует поляризации вакуума.

Если пренебречь замкнутыми петлями, то в случае $M = 0$ получим формулу

$$G(x, y) = \int G(x, y | \varphi) d\varphi,$$

имеющуюся в работе Эдвардса (1).

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
17 IX 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ S. Edwards, Phil. Mag., 45, 758 (1954).

* Этот результат был доложен на семинаре кафедры теоретической физики МГУ на заседании 19 IV 1954 г.