

М. С. ПИНСКЕР

КОЛИЧЕСТВО ИНФОРМАЦИИ О ГАУССОВСКОМ СЛУЧАЙНОМ СТАЦИОНАРНОМ ПРОЦЕССЕ, СОДЕРЖАЩЕЙСЯ ВО ВТОРОМ ПРОЦЕССЕ, СТАЦИОНАРНО С НИМ СВЯЗАННОМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 IX 1954)

Если $p_{\xi\eta}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ есть плотность распределения вероятности системы $2n$ случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n$, то количество информации относительно одного из случайных векторов $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ и $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, содержащееся в другом, определяется формулой ⁽⁴⁾

$$I(\xi, \eta) = I(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n) = \int \dots \int p_{\xi\eta}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \log \frac{p_{\xi\eta}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)}{p_{\xi}(x_1, \dots, x_n) p_{\eta}(y_1, \dots, y_n)} \times \\ \times dx_1 \dots dx_n dy_1 \dots dy_n, \quad (1)$$

где $p_{\xi}(x_1, \dots, x_n)$ и $p_{\eta}(y_1, \dots, y_n)$ — плотности распределения вероятностей случайных векторов ξ и η , соответственно. Всегда $0 \leq I \leq \infty$.

Пусть теперь ξ_n и η_n ($n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) — две случайные стационарные и стационарно-связанные последовательности. Количество информации на один шаг относительно одной из случайных последовательностей ξ_n и η_n , содержащейся в другой, по определению, равно

$$I(\{\xi_n\}, \{\eta_n\}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} I_k(\xi, \eta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} I(\xi_1, \dots, \xi_k, \eta_1, \dots, \eta_k). \quad (2)$$

В интересующем нас далее случае предел (2) существует. Величина (2) часто может быть выражена через энтропии $H(\{\xi_n\})$ и $H(\{\eta_n\})$ случайных последовательностей ξ_n, η_n , которые, в соответствии с ⁽⁴⁾, можно определить следующим образом:

$$H(\{\xi_n\}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H_k(\xi), \quad (3)$$

где

$$H_k(\xi) = H(\xi_1, \dots, \xi_k) = - \int \dots \int p_{\xi}(x_1, \dots, x_k) dx_1, \dots, dx_k. \quad (4)$$

Для пары случайных стационарных и стационарно-связанных процессов с непрерывным временем $\xi(t)$ и $\eta(t)$ естественно ввести в рассмотрение пары последовательностей $\xi_n^h = \xi(nh)$ и $\eta_n^h = \eta(nh)$, зависящих от выбора шага h . Можно предложить два варианта определения количества информации на единицу времени относительно одного из случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$, содержащейся в другом:

$$I(\{\xi(t)\}, \{\eta(t)\}) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} I(\{\xi_n^h\}, \{\eta_n^h\}), \quad (5)$$

$$I(\{\xi(t)\}, \{\eta(t)\}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \lim_{h \rightarrow +0} I(\xi_1^h, \xi_2^h, \dots, \xi_{T/h}^h, \eta_1^h, \eta_2^h, \dots, \eta_{T/h}^h), \quad (6)$$

где T/h — целое число.

Отметим, что в ряде случаев легко показывается равенство чисел, определяемых формулами (5) и (6). Например, это имеет место, если стационарные случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ будут гауссовскими* с рациональными спектральными плотностями. При дальнейшем изложении настоящей заметки мы будем рассматривать только первый вариант определения количества информации.

Теперь выведем формулы, позволяющие находить энтропию и количество информации для гауссовских стационарных случайных процессов по значениям их спектральных функций.

Лемма. Энтропия случайной гауссовской стационарной последовательности η_n ($n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) равна

$$H(\{\eta_n\}) = \log \sqrt{4\pi^2 e} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log f_{\eta\eta}(\lambda) d\lambda, \quad (7)$$

где $f_{\eta\eta}(\lambda)$ — производная по λ от спектральной функции последовательности η_n .

Доказательство. Так как $p_n(x_1, \dots, x_n)$ есть плотность нормального распределения, то энтропия $H_n(\eta)$ может быть найдена по формуле ^(4,5)

$$H_n(\eta) = H(\eta_1, \dots, \eta_n) = \log (2\pi e)^{n/2} |B_{\eta\eta}^{(n)}|^{-1/2}, \quad (8)$$

где $|B_{\eta\eta}^{(n)}|$ — детерминант корреляционной матрицы случайных величин $\eta_1, \dots, \eta_n$. Отсюда видно, что

$$H_{k+1}(\eta) - H_k(\eta) = \log \sqrt{2\pi e} \frac{|B_{\eta\eta}^{(k+1)}|^{-1/2}}{|B_{\eta\eta}^{(k)}|^{-1/2}} = \log \sqrt{2\pi e} \sigma_{\eta\eta}(k),$$

$$\sigma_{\eta\eta}^2(k) = \min_{a_2, \dots, a_n, a_{n+1}} M \left| \eta_1 - \sum_{s=2}^{k+1} a_s \eta_s \right|^2 \quad (9)$$

и, в соответствии с результатами А. Н. Колмогорова ^(2,3),

$$H(\{\eta_n\}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H_k(\eta) = \lim_{k \rightarrow \infty} [H_{k+1}(\eta) - H_k(\eta)] =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \log \sqrt{2\pi e} \sigma_{\eta\eta}(k) = \log \sqrt{2\pi e} \sqrt{2\pi} \exp \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log f_{\eta\eta}(\lambda) d\lambda =$$

$$= \log \sqrt{4\pi^2 e} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log f_{\eta\eta}(\lambda) d\lambda. \quad (10)$$

Следствие. Энтропия гауссовской стационарной последовательности конечна тогда и только тогда, когда последовательность несингулярна ^(1,2).

Теорема 1. Если ξ_n и η_n ($n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) — случайные гауссовские стационарные и стационарно-связанные последовательности, из которых хотя бы одна несингулярна (например, η_n), то количество информации на один шаг относительно одной из этих случайных последовательностей, содержащейся в другой, можно вычислить по формуле

$$I(\{\xi_n\}, \{\eta_n\}) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \frac{f_{\xi\xi}(\lambda) f_{\eta\eta}(\lambda)}{f_{\xi\xi}(\lambda) f_{\eta\eta}(\lambda) - |f_{\xi\eta}(\lambda)|^2} d\lambda, \quad (11)$$

* Т. е. если система случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ имеет n -мерное нормальное распределение.

где подинтегральное выражение считается равным нулю, если $f_{\xi\xi}(\lambda)f_{\eta\eta}(\lambda)=0$; $f_{\xi\xi}(\lambda)$, $f_{\eta\eta}(\lambda)$ и $f_{\xi\eta}(\lambda)$ — производные по λ от спектральных функций и взаимной спектральной функции последовательностей ξ_n и η_n .

Доказательство. Из (1) и (4) видно, что

$$I_n(\xi, \eta) = -H_n(\xi, \eta) + H_n(\xi) + H_n(\eta), \quad (12)$$

где взаимная энтропия $H_n(\xi, \eta)$ определяется равенством

$$\begin{aligned} H_n(\xi, \eta) &= H(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n) = \\ &= - \int \dots \int p_{\xi\eta}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \log p_{\xi\eta}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \times \\ &\quad \times dx_1 \dots dx_n dy_1 \dots dy_n. \end{aligned} \quad (13)$$

Для гауссовских последовательностей ξ_n и η_n энтропии $H_n(\xi)$ и $H_n(\eta)$ могут быть найдены по формуле (8), а взаимная энтропия равна

$$H_n(\xi, \eta) = \log(2\pi e)^n |B_{\xi\eta}^{(n,n)}|^{1/2}, \quad (14)$$

где $|B_{\xi\eta}^{(n,n)}|$ — детерминант корреляционной матрицы случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n$. Отсюда выводится, что

$$\begin{aligned} I(\{\xi_n\}, \{\eta_n\}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} I_k(\xi, \eta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \left[H_k(\eta) - \log(2\pi e)^{k/2} \frac{|B_{\xi\eta}^{(k,k)}|^{1/2}}{|B_{\xi\xi}^{(k)}|^{1/2}} \right] = \\ &= H(\{\eta_n\}) - \log \sqrt{2\pi e} \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{|B_{\xi\eta}^{(k,k)}|^{1/2}}{|B_{\xi\xi}^{(k)}|^{1/2}}} = H(\{\eta_n\}) - \log \sqrt{2\pi e} \sigma_{\tilde{\eta}}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\sigma_{\tilde{\eta}}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{a_1, \dots, a_k} \mathbf{M} \left| \tilde{\eta}_1 - \sum_{s=2}^k a_s \tilde{\eta}_s \right|^2, \quad (16)$$

$\tilde{\eta}_k$ — перпендикуляр из η_k на гильбертово пространство — замкнутую линейную оболочку случайных величин ξ_p ($p = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$). Из сравнения равенств (15), (7), (9) и (10) найдем

$$\begin{aligned} I(\{\xi_n\}, \{\eta_n\}) &= \log \sqrt{4\pi^2 e} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log f_{\eta\eta}(\lambda) d\lambda - \\ &- \log \sqrt{2\pi e} \sqrt{2\pi} \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log f_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}}(\lambda) d\lambda \right\} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \frac{f_{\eta\eta}(\lambda)}{f_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}}(\lambda)} d\lambda, \end{aligned} \quad (17)$$

где $f_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}}(\lambda)$ — производная по λ от спектральной функции стационарной случайной последовательности $\tilde{\eta}_n$. Последнее равенство доказывает теорему, так как

$$f_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}}(\lambda) = \frac{f_{\xi\xi}(\lambda)f_{\eta\eta}(\lambda) - |f_{\xi\eta}(\lambda)|^2}{f_{\xi\xi}(\lambda)} \quad (f_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}}(\lambda) = f_{\eta\eta}(\lambda), \text{ если } f_{\xi\xi}(\lambda) = 0).$$

Пример. Пусть

$$\eta_n = \xi_n + \zeta_n \quad (n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots),$$

где ξ_n — марковская случайная гауссовская стационарная последовательность с $f_{\xi\xi}(\lambda) = \frac{c_1}{2\pi} \frac{1-a^2}{|e^{i\lambda} - a|^2}$, а ζ_n — независимая от нее гауссовская

стационарная случайная последовательность с белым спектром $f_{\xi\xi}(\lambda) = c_2/2\pi$. В этом случае

$$I(\{\xi_n\}, \{\eta_n\}) = \frac{1}{2} \log \frac{c_2(1+a^2) + c_1(1-a^2) + \sqrt{(c_2^2 + c_1^2)(1-a^2)^2 + 2c_1c_2(1-a^2)}}{2c_2}. \quad (18)$$

Теорема 2. Если $\xi(t)$ и $\eta(t)$ ($-\infty < t < \infty$) — случайные гауссовские стационарные и стационарно-связанные процессы, из которых хотя бы один несингулярен (например, $\eta(t)$), то количество информации на единицу времени относительно одного из этих случайных процессов, содержащейся в другом, можно вычислить по формуле

$$I(\{\xi(t)\}, \{\eta(t)\}) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log \frac{f_{\xi\xi}(\lambda) f_{\eta\eta}(\lambda)}{f_{\xi\xi}(\lambda) f_{\eta\eta}(\lambda) - |f_{\eta\xi}(\lambda)|^2} d\lambda, \quad (19)$$

где подынтегральное выражение считается равным нулю, если $f_{\xi\xi}(\lambda) f_{\eta\eta}(\lambda) = 0$, а $f_{\xi\xi}(\lambda)$, $f_{\eta\eta}(\lambda)$ и $f_{\eta\xi}(\lambda)$ — производные по λ от спектральных функций и взаимной спектральной функции процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

Доказательство. В соответствии с теоремой 1, легко показать, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} I(\{\xi(nh)\}, \{\eta(nh)\}) &= \frac{1}{h} I(\{\xi_n^h\}, \{\eta_n^h\}) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \log \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{\xi\xi}\left(\lambda + \frac{2\pi k}{h}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{\eta\eta}\left(\lambda + \frac{2\pi k}{h}\right)}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{\xi\xi}\left(\lambda + \frac{2\pi k}{h}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{\eta\eta}\left(\lambda + \frac{2\pi k}{h}\right) - \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{\eta\xi}\left(\lambda + \frac{2\pi k}{h}\right) \right|^2} d\lambda, \end{aligned} \quad (20)$$

и для завершения доказательства теоремы остается заметить, что при $h \rightarrow 0$ выражение, стоящее в правой части равенства (20), сходится к величине, стоящей в правой части формулы (19).

Замечание. Формулы (11) и (19) остаются справедливыми и в ряде случаев, когда обе случайные функции сингулярны, например, если

$$\frac{f_{\xi\xi}(\lambda) f_{\eta\eta}(\lambda)}{f_{\xi\xi}(\lambda) f_{\eta\eta}(\lambda) - |f_{\eta\xi}(\lambda)|^2} < \alpha < \infty.$$

Повидимому, эти формулы справедливы вообще для любых двух гауссовских стационарных случайных функций*.

В заключение считаю необходимым выразить глубокую благодарность А. Н. Колмогорову за постановку задач, рассмотренных в настоящей заметке.

Московский государственный
университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
29 VIII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. М. Яглом, Усп. матем. наук, 7, № 5, (51), 3 (1952). ² А. Н. Колмогоров, Бюлл. МГУ, 2, № 6 (1941). ³ А. Н. Колмогоров, Изв. АН СССР, сер. матем., 5, № 1, 3 (1941). ⁴ Р. Шэннон, Сборн. ст. Теория передачи электрических сигналов при наличии помех, ИЛ, 1943, стр. 7—87. ⁵ P. Elias, Proc. I. R. E., 39, № 7, 839 (1951).

* Во всяком случае, можно показать, что имеет место неравенство

$$I(\{\xi(t)\}, \{\eta(t)\}) \geq \int \log \frac{f_{\xi\xi}(\lambda) f_{\eta\eta}(\lambda)}{f_{\xi\xi}(\lambda) f_{\eta\eta}(\lambda) - |f_{\eta\xi}(\lambda)|^2} d\lambda.$$