

Н. Н. МЕЙМАН

ОБ УРАВНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 12 VIII 1954)

1°. Рассматривается задача Коши в полупространстве $t \geq 0$ для общего, линейного и нелинейного, уравнения теплопроводности

$$L(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - A \frac{\partial u}{\partial x} - Bu - Q = 0.$$

Настоящая заметка базируется на общих понятиях и теоремах, изложенных в нашей статье (1). В целях краткости изложение ведется для одного пространственного переменного, так как из текста будет следовать очевидность перехода к многим переменным.

2°. Все коэффициенты оператора $L(u)$ будем предполагать ограниченными и равномерно непрерывными в полосе $0 \leq t \leq T$, $-\infty < x < +\infty$,

$$0 \leq D \leq d, \quad |A| < a, \quad |B| < b, \quad |Q| < q, \quad (1)$$

где d, a, b, q — константы. Регулярным в полосе $0 \leq t \leq T$ решением задачи Коши будем называть решение, ограниченное и равномерно непрерывное вместе со всеми производными, входящими в уравнение.

Разностную схему определим так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &\sim \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{\Delta x^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &\sim \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{\Delta x} \quad \text{при } A_m^n > 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{\Delta x} \quad \text{при } A_m^n < 0. \end{aligned}$$

Для регулярного решения оператор $L_\Delta(u)$ аппроксимирует (1) оператор $L(u)$ с весом $M(x) = 1$.

Очевидно (для определенности полагаем $A > 0$),

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} = & \left(1 - 2D_m^n \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - A_m^n \frac{\Delta t}{\Delta x} + B_m^n \Delta t\right) u_m^n + D_m^n \frac{\Delta}{\Delta x^2} u_{m-1}^n + \\ & + \left(D_m^n \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + A_m^n \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) u_{m+1}^n + Q_m^n \Delta t. \end{aligned} \quad (2)$$

Соотношение между шагами выберем так, что

$$0 < \eta < \frac{\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2d}. \quad (3)$$

Основная оценка. Если Δt настолько мало, что $2d \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + a \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$, и на слое $n_0 = \frac{t_0}{\Delta t}$ $|u_m^{n_0}| < M_0$, то на слое $n = \frac{t}{\Delta t}$, $t > t_0$

$$\begin{aligned} |u_m^n| &< M_0 e^{b(t-t_0)} + \frac{q}{b} e^{b(t-t_0)} \quad (b \neq 0); \\ |u_m^n| &< M_0 + q(t-t_0) \quad (b = 0). \end{aligned} \quad (4)$$

3°. В линейном случае из (4) следует устойчивость схемы $[(^{(1)}M_1(x) = M_2(x) = 1]$, откуда следует (1):

Теорема единственности и сходимости. Пусть в полосе $0 \leq t \leq T$ коэффициенты линейного уравнения теплопроводности ограничены и равномерно непрерывны и начальная функция $\varphi(x)$ и ее первая и вторая производные ограничены и равномерно непрерывны. Тогда задача Коши имеет не более одного регулярного решения и, если такое решение существует, то решение разностного уравнения (2) при стремлении шагов сетки к нулю равномерно во всей полосе стремится к этому решению.

Для доказательства существования решения рассмотрим разностные уравнения для $\tau_m^n = \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{\Delta x}$, $\sigma_m^n = \frac{\tau_{m+1}^n - \tau_m^n}{\Delta x}$, $\rho_m^n = \frac{\sigma_{m+1}^n - \sigma_m^n}{\Delta x}$, $\zeta_m^n = \frac{\rho_{m+1}^n - \rho_m^n}{\Delta x}$. Эти разностные отношения удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \tau_m^{n+1} = & \left(1 - 2\alpha_m^n - \Delta\alpha_m^n - A_m^n \frac{\Delta t}{\Delta x} + B_m^n \Delta t\right) \tau_m^n + \alpha_m^n \tau_{m-1}^n + \\ & + \left(\alpha_m^n + \Delta\alpha_m^n + A_m^n \frac{\Delta t}{\Delta x} + \Delta A_m^n \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \tau_{m+1}^n + \left(\frac{\Delta B_m^n}{\Delta x} u_{m+1}^n + \frac{\Delta Q_m^n}{\Delta x}\right) \Delta t; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_m^{n+1} = & \left(1 - 2\alpha_m^n - 2\Delta\alpha_m^n - A_m^n \frac{\Delta t}{\Delta x} + B_m^n \Delta t\right) \sigma_m^n + \alpha_m^n \sigma_{m-1}^n + \\ & + \left(\alpha_m^n + 2\Delta\alpha_m^n + \Delta^2\alpha_m^n + A_m^n \frac{\Delta t}{\Delta x} + 2\Delta A_m^n \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \sigma_{m+1}^n + \\ & + \left(2 \frac{\Delta B_m^n}{\Delta x} \tau_{m+1}^n + \frac{\Delta^2 A_m^n}{\Delta x^2} \tau_{m+2}^n + \frac{\Delta^2 B_m^n}{\Delta x^2} u_{m+2}^n + \frac{\Delta^2 Q_m^n}{\Delta x^2}\right) \Delta t; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \rho_m^{n+1} = & \left(1 - 2\alpha_m^n - 3\Delta\alpha_m^n - A_m^n \frac{\Delta t}{\Delta x} + B_m^n \Delta t\right) \rho_m^n + \alpha_m^n \rho_{m-1}^n + \\ & + \left(\alpha_m^n + 3\Delta\alpha_m^n + 3\Delta^2\alpha_m^n + A_m^n \frac{\Delta t}{\Delta x} + 3\Delta A_m^n \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \rho_{m+1}^n + \\ & + \left[\left(\frac{\Delta^3 D_m^n}{\Delta x^3} + 3 \frac{\Delta^2 A_m^n}{\Delta x^3}\right) \sigma_{m+2}^n + 3 \frac{\Delta B_m^n}{\Delta x} \sigma_{m+1}^n + \frac{\Delta^3 A_m^n}{\Delta x^3} \tau_{m+3}^n + 3 \frac{\Delta^2 B_m^n}{\Delta x^2} \tau_{m+2}^n + \right. \\ & \left. + \frac{\Delta^3 B_m^n}{\Delta x^3} u_{m+3}^n + \frac{\Delta^3 Q_m^n}{\Delta x^3}\right] \Delta t, \end{aligned} \quad (7)$$

где для краткости введены обозначения: $\alpha_m^n = D_m^n \Delta t / \Delta x^2$, $\Delta F_m^n = F_{m+1}^n - F_m^n$, $\Delta^2 F_m^n = \Delta(\Delta F_m^n)$, $\Delta^3 F_m^n = \Delta(\Delta^2 F_m^n)$.

Пусть коэффициенты A , B , Q и начальная функция удовлетворяют условию Липшица с ограниченными константами

$$|\Delta A_m^n| < a^{(1)} \Delta x, \quad |\Delta B_m^n| < b^{(1)} \Delta x, \quad |\Delta Q_m^n| < q^{(1)} \Delta x, \quad |\Delta \varphi(x)| < \mu^{(1)} \Delta x; \quad (8)$$

тогда, применив оценку (4) к τ_m^n , получим

$$|\tau_m^n| < \left(\mu^{(1)} + \frac{b^{(1)} u + q^{(1)}}{b + a^{(1)}}\right) e^{(b+a^{(1)})t}, \quad (9)$$

где u — верхняя грань $|u_m^n|$.

Аналогично

$$|\sigma_m^n| < \left(\mu^{(2)} + \frac{2b^{(1)}\tau + a^{(2)}\tau + b^{(2)}u + q^{(2)}}{b + 2a^{(1)} + d^{(2)}} \right) e^{(b+2a^{(1)}+d^{(2)})t}; \quad (10)$$

$$|\rho_m^n| < \left[\mu^{(3)} + \frac{(d^{(3)} + 3a^{(2)} + 3b^{(1)})\sigma + (a^{(3)} + 3b^{(2)})\tau + b^{(3)}u + q^{(3)}}{b + 3a^{(1)} + 3d^{(2)}} \right] e^{(b+3a^{(1)}+3d^{(2)})t}. \quad (11)$$

Здесь τ и σ — верхние грани $|\tau_m^n|$ и $|\sigma_m^n|$, а коэффициенты уравнения и начальная функция удовлетворяют условиям гладкости

$$|\Delta^i D_m^n| < d^{(i)} \Delta x^i, \quad |\Delta^i A_m^n| < a^{(i)} dx^i, \quad |\Delta^i B_m^n| < b^{(i)} \Delta x^i, \\ |\Delta^i Q_m^n| < q^{(i)} \Delta x^i, \quad |\Delta^i \varphi(x)| < \mu^{(i)} \Delta x^i, \quad i = 2, 3. \quad (12)$$

При условии (12) с $i = 2$ σ_m^n ограничено, и в силу равенства $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} = D_m^n \sigma_{m-1}^n + A_m^n \tau_m^n + B_m^n u_m^n + Q_m^n$ ограничено и отношение $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t}$, поэтому к функции u_m^n применима теорема Арцеля и существует обобщенное решение уравнения. Если имеют место условия (12) с $i = 3$, то ограничено ρ_m^n , и в силу равенства $\frac{\tau_m^{n+1} - \tau_m^n}{\Delta t} = D_m^n \rho_{m-1}^n + A_m^n + \frac{D_{m+1}^n - D_m^n}{\Delta x} \sigma_m^n + B_m^n \tau_m^n + \frac{\Delta A_m^n}{\Delta x} \tau_{m+1}^n + \left(\frac{\Delta B_m^n}{\Delta x} u_{m+1} + \frac{\Delta Q_m^n}{\Delta x} \right)$ ограничено $\frac{\tau_m^{n+1} - \tau_m^n}{\Delta t}$, т. е. можно применить теорему Арцеля к τ_m^n , и, значит, существует обобщенное решение уравнения с первой производной по x . Аналогично доказывается существование регулярного решения.

Теорема существования. Пусть в полосе $0 \leq t \leq T$ коэффициенты линейного уравнения теплопроводности ограничены и равномерно непрерывны. Если все коэффициенты и начальная функция имеют ограниченные производные по x первых трех порядков и третья производная удовлетворяет условию Липшица с ограниченной константой, то задача Коши имеет в полосе $0 \leq t \leq T$ единственное регулярное решение.

При условиях гладкости на единицу меньшего порядка существует обобщенное решение с непрерывной производной по x ; при условиях гладкости на две единицы меньшего порядка существует обобщенное решение.

Известным способом С. Н. Бернштейна можно показать, что для начальной функции достаточно требование непрерывности.

4°. Нелинейный случай: коэффициенты уравнения зависят от u . В этом случае непосредственно из оценки (4) следует лишь ограниченность u_m^n , но не устойчивость. Пусть $u_m^{(1)n}$ и $u_m^{(2)n}$ — два решения разностного уравнения (2) (соответственно будем обозначать все величины, зависящие от $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$). Разность $v = u^{(1)} - u^{(2)}$ удовлетворяет тому же разностному уравнению, но с измененным свободным членом

$$\hat{Q} = [D^{(2)} - D^{(1)}] \frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2} + [A^{(2)} - A^{(1)}] \frac{\Delta u}{\Delta x} + [B^{(2)} - B^{(1)}] u + [Q^{(2)} - Q^{(1)}]. \quad (13)$$

Пусть коэффициенты удовлетворяют условию Липшица по x и u :

$$|\Delta D| < d^{(1)} \Delta x + \bar{d}^{(1)} |\Delta u|, \quad |\Delta A| < a^{(1)} \Delta x + \bar{a}^{(1)} |\Delta u|, \\ |\Delta B| < b^{(1)} \Delta x + \bar{b}^{(1)} |\Delta u|, \quad |\Delta Q| < q^{(1)} \Delta x + \bar{q}^{(1)} |\Delta u|, \quad (14)$$

где d, a, b, q — константы. Из оценки (4) следует, что если при $t = t_0$ $|u_m^{(2)} - u_m^{(1)}| < \varepsilon_0$, то

$$|u_m^{(2)} - u_m^{(1)}| < \varepsilon_0 \exp \left[(b + \bar{a}^{(1)\sigma} + \bar{a}^{(1)\tau} + \bar{b}^{(1)u} + \bar{q}^{(1)}) (t - t_0) \right], \quad t = n\Delta t > t_0, \quad (15)$$

где u, τ, σ означают верхние границы величин $|u_m^{(1)}|, |\tau_m^{(1)}|, |\sigma_m^{(1)}|$ на полосе $0 \leq t \leq T$, если таковые существуют. Итак, доказательство устойчивости решения $u_m^{(1)}$ сводится к доказательству ограниченности $\sigma_m^{(1)}$ и $\tau_m^{(1)}$.

Введем обозначения $\alpha = b^{(1)u}, \beta = b + a^{(1)} + \bar{b}^{(1)u} + \bar{q}^{(1)}, \gamma = \bar{a}^{(1)}$
 $r_{1,2} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\bar{a}^{(1)}}}{2}$. Можно показать, что в полосе $0 \leq t \leq T_{\text{кр}}$, где

$$T_{\text{кр}} = \min \left[T, \frac{1}{r_1 - r_2} \ln \frac{r_1 + \gamma \mu^{(1)}}{r_2 + \gamma \mu^{(1)}} \right], \quad (16)$$

имеет место неравенство

$$|\tau_m^{(1)}| < \frac{1}{|\gamma|} \frac{r_1 e^{(r_1 - r_2)t} - r_2 \frac{r_1 + \gamma \mu^{(1)}}{r_2 + \gamma \mu^{(1)}}}{e^{(r_1 + r_2)t} - \frac{r_1 + \gamma \mu^{(1)}}{r_2 + \gamma \mu^{(1)}}}. \quad (17)$$

Для $\sigma_m^{(1)}$ имеют место формулы (16) и (17), но с другими α, β, γ . Для $\sigma_m^{(1)}$: $\alpha = 2b^{(1)\tau} + 2\bar{b}^{(1)\tau^2} + a^{(2)} + 2a_{12}\tau + a_{22}\tau^2 + b^{(2)u} + 2b_{12}\tau u + b_{22}\tau^2 u + q^{(2)} + 2q_{12}\tau + q_{22}\tau^2$; $\beta = b + 2\bar{a}^{(1)\tau} + 2a^{(1)} + a^{(2)} + 2d_{12}\tau + d_{22}\tau^2 + \bar{a}^{(2)\tau} + \bar{b}^{(2)u} + q^{(2)}$; $\gamma = \bar{a}^{(2)}$. При этом предполагается, что все коэффициенты удовлетворяют неравенствам вида $|\Delta^2 D| < \bar{a}^{(2)} \Delta x^2 + 2d_{12}|\Delta x| \cdot |\Delta u| + d_{22}|\Delta u|^2 + \bar{a}^{(2)}|\Delta^2 u|$. Для $\rho_m^{(1)}$ и $\zeta_m^{(1)}$ $T_{\text{кр}} = \min(T_{\text{кр}}, T_{\sigma \text{кр}})$.

Теорема сходимости, единственности и существования. Пусть в полосе $0 < t \leq T$, где $0 \leq T \leq +\infty$, все коэффициенты нелинейного уравнения имеют ограниченные частные производные по x и u первых трех порядков и производные третьего порядка удовлетворяют по x и u условиям Липшица с ограниченными константами. Пусть начальная функция имеет три первых ограниченных производных и третья производная удовлетворяет условию Липшица с ограниченной константой. При этих условиях задача Коши имеет единственное регулярное решение в полосе $0 \leq t \leq T_{\text{кр}}$ и решение разностного уравнения при $\Delta x \rightarrow 0$ равномерно стремится к этому решению.

Примечание 1. Если коэффициенты D и A не зависят от u , то решение существует во всей полосе $0 \leq t \leq T$, а при $T = +\infty$ во всей полуплоскости $t \geq 0$.

Примечание 2. При понижении на единицу условий гладкости получим обобщенное решение с первой производной, а при понижении на две единицы — просто обобщенное решение.

Изложенный метод применим также к решению краевых задач для уравнения теплопроводности.

Институт физических проблем
им. С. И. Вавилова
Академии наук СССР

Поступило
14 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. Н. Мейман, ДАН, 97, № 4 (1954).