

ОБ ИМПРИМИТИВНЫХ ГРУППАХ ЛИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 IX 1954)

§ 1. Задача о классификации всех примитивных групп преобразований, поставленная еще Ли, полностью решена работами В. В. Морозова ⁽¹⁾ и Е. Б. Дынкина ⁽²⁾, что же касается вопроса о классификации импримитивных групп, то он остался вне рассмотрения, если не считать известного результата для плоского случая (см., например, ⁽³⁾, стр. 225—237). Между тем, этот вопрос представляет самостоятельный интерес. В настоящей работе даются некоторые общие соображения о методах построения инфинитезимальных операторов импримитивных групп, на основании которых воспроизводится классификация импримитивных групп плоскости и дается классификация неразрешимых импримитивных групп трехмерного пространства (в последнем случае многообразие разрешимых групп настолько велико, что не удалось дать удовлетворительной их классификации). В дальнейшем всюду G — импримитивная группа преобразований n -мерного комплексного пространства.

§ 2. Если G проста и транзитивна, то ее стационарная подгруппа немаксимальна (⁽³⁾, стр. 39). Таким образом, построение всех простых транзитивных G приводится к нахождению всех немаксимальных подгрупп индекса n простых групп. Если G проста и интранзитивна, то она подобна транзитивной группе пространства размерности $\leq n-1$, следовательно, нахождение таких групп приводится к предыдущей задаче. Если G полупроста, то имеет место следующая теорема:

Теорема 1. Если G распадается в прямое произведение s простых неодночленных групп G_i , то либо все G_i интранзитивны, либо среди них не более одной транзитивной, и тогда $s \leq \left[\frac{n-1}{3} \right] + 1$.

Отсюда следует, что для $n=2, 3$ все G_i интранзитивны. При этом легко видеть, что при $n=3$ $s \leq 3$.

§ 3. Если G — группа с нетривиальным радикалом R , то, по теореме Леви, $G = P \cdot R$, где P полупроста.

Теорема 2. Если $G = P \times R$ и $P = P_1 \times \dots \times P_s$ и если хотя одна из групп P_i транзитивна, то R интранзитивен.

Весьма полезна также следующая теорема:

Теорема 3. Если P содержит подгруппу дробных линейных подстановок $p_1, x^1 p_1, (x^1)^2 p_1$ ($p_1 = \partial / \partial x^1$), то R есть группа преобразований $(n-1)$ -мерного пространства $(x^2, \dots, x^n)$.

В случае, когда G не распадается в прямое произведение полупростой подгруппы и радикала, построение операторов G можно проводить следующим образом: разложение $G = P \cdot R$ определяет представление Γ полупростой группы P в пространстве, натягиваемом независимыми операторами радикала. Радикал, рассматриваемый как пространство представления, распадается в прямую сумму инвариантных подпространств R_i , в каждом из которых индуцируется неприводимое представление Γ_i . Полагая вес его заданным и применяя

теорию представлений, мы получаем возможность определить вид операторов R_i . Затем исследуем возможность существования в R нескольких представлений одинакового или различных весов. Наконец, требуем, чтобы полученные операторы радикала действительно порождали разрешимую группу. Метод этот обычно достаточно быстро ведет к цели.

§ 4. Если группа G порядка r разрешима, то рассмотрение ее композиционного ряда

$$G_r \supset G_{r-1} \supset \dots \supset G_1$$

позволяет нам считать G ($r-1$) раз проведенным расширением группы G_1 . Таким образом, для построения всех разрешимых групп мы проводим последовательное расширение одночленной группы G_1 так, чтобы каждый раз расширяемая группа являлась нормальным делителем расширенной. Недостаток этого способа лишь в том, что он не может гарантировать, что полученные различными расширениями группы не будут подобны, так как одна и та же группа может иметь различные композиционные ряды.

§ 5. Применяя эти соображения к случаям $n=2, 3$, мы получаем следующую классификацию импримитивных групп трехмерного пространства. В последующем $p = \partial/\partial x$, $q = \partial/\partial y$, $r = \partial/\partial z$; для каждого типа полупростых групп указаны возможные присоединения радикалов; оператор радикала, заключенный в квадратные скобки, может как входить, так и не входить в радикал. Структура полупростой подгруппы указана в круглых скобках.

Импримитивные группы плоскости

I. (A_1) .

1) p, xp, x^2p ; радикал $q, [yq]$.

2) $p, xp + q, x^2p + 2xq$; радикал q .

3) $p, xp + \frac{s}{2}yq, x^2p + sxq$; радикал $q, xq, \dots, x^sq, [yq]$ ($s \neq 0$).

4) $p, xp - yq, \frac{1}{2}x^2p + (1 - xy)q$; радикала не допускает.

II. $(A_1 \times A_1)$. p, xp, x^2p, q, yq, y^2q .

III. Разрешимые группы.

1) $p, [xp]$.

2) $q, \varphi_1(x)q, \dots, \varphi_s(x)q, [yq]$, где $1, \varphi_1, \dots, \varphi_s$ линейно независимы.

3) $p, x^{m_i} \exp(\alpha_i x)q, \dots, \exp(\alpha_i x)q, [yq]$ ($i=1, \dots, s$; $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$).

4) $xp, p, yq, x^sq, \dots, xq, q$.

5) $xp + ayq, p, x^sq, \dots, xq, q$.

6) $xp + (ay + x^{s+1})q, p, x^sq, \dots, xq, q$.

7) $p + yq, q$.

Неразрешимые импримитивные группы трехмерного пространства

I. (A_1) .

1) p, xp, x^2p . Радикалы: а) $\varphi_1(z)q, \dots, \varphi_s(z)q, q, [yq]$ ($1, \varphi_1, \dots, \varphi_s$ линейно независимы); б) $r, z^{m_i} \exp(\alpha_i z)q, \dots, \exp(\alpha_i z)q, [yq]$ ($i=1, \dots, s$; $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$); в) $zr + ayq, r, z^sq, \dots, zq, q$; г) $zr + (ay + z^{s+1})q, r, z^sq, \dots, zq, q$; д) $zr, r, yq, z^sq, \dots, zq, q$.

2) $p, xp + q, x^2p + 2xq$. Радикалы: а) $x^j \exp\left(-\frac{sy}{2}\right) \varphi_i(z) q, [q]$ ($i = 1, \dots, n; j = 0, \dots, s; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ линейно независимы); б) $x^j z^k \exp\left(-\frac{sy}{2}\right) \exp(\alpha_i z) q, r, [q]$ ($i = 1, \dots, n; k = 0, \dots, m_i; j = 0, \dots, s; \alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$); в) $x^j \exp\left(-\frac{sy}{2}\right) z^k q, r, zr, [q]$ ($j = 0, \dots, s; k = 0, \dots, n$); г) $x^j \exp\left(-\frac{ipy}{2}\right) r, x^l \exp\left(-\frac{py}{2}\right) (aq + (b - \frac{akp}{2} z) r), \alpha q + (\beta + \gamma z) r$ ($j = 0, \dots, ip; i = 2, \dots, k; l = 0, \dots, p$).

3) $p + q, xp + yq, x^2p + y^2q$. Радикалы: $\frac{\partial^i}{(\partial x')^i} \left[\frac{x'}{y'} (x' + y') \right]^k r, [zr]$ ($i = 0, \dots, 2k; k = k_1, k_2, \dots; x' = -\frac{1}{x}, y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$).

4) $-\frac{1}{z} q + \frac{2}{y-x} r, zr, z(y-x)^2 p$. Радикалы: а) $z^{\frac{s_1}{2}-j} (y-x)^j \times$
 $\times (p+q), [xp+yq-zr]$ ($j = 0, \dots, s_1$); б) $z^{\frac{s}{2}-j} (y-x)^j (xp+yq -$
 $- zr)$ ($j = 0, \dots, s$).

II. (A_2) .

1) $p, q, r - xp - 2yq, xp - yq, yp, xq, x^2p + xyq - xr, xyp +$
 $+ y^2q - yr$. Радикалы: $x^m y^n \exp(sz) r, [r]$ ($m + n \leq s$).

2) $p, q, xq + r, -2xp - yq + zr, xp - yq - 2zr, x^2p + xyq -$
 $-(xz - y)r, xyp + y^2q - z(xz - y)r, yp - z^2r$. Присоединения ради-

кала не допускает.

3) $p, q, xp, yp, xq, yq, x^2p + xyq, xyp + y^2q$. Радикалы: $r, [zr]$.

III. $(A_1 \times A_1)$.

1) p, xp, x^2p, q, yq, y^2q . Радикалы: $r, [zr]$.

2) $p, xp + q, x^2p + 2xq; r, zr + q, z^2r + 2zq$. Радикалы:
 $x^i z^j \exp\left(-\frac{s_k y}{2}\right) q$ ($i, j = 0, \dots, s_k$).

3) $p, xp, x^2p, q, yq + r, y^2q + 2yr$. Радикалы: $x^i \exp\left(-\frac{sy}{2}\right) q,$
 $[q]$ ($i = 0, \dots, s$).

4) $p, xp, x^2p, q, yq - zr, \frac{1}{2}y^2q + (1 - yz)r$, присоединения ради-

кала не допускает.

IV. $(A_1 \times A_2)$.

$p, xp, x^2p, q, r, yq, zq, yr, zr, y^2q + yzr, yzq + z^2r$. Присоединения радикала не допускает.

V. $(A_1 \times A_1 \times A_1)$.

$p, xp, x^2p, q, yq, y^2q, r, zr, z^2r$, присоединения радикала не допускает.

Университет им. Ким Ир Сена
 Сун-Чон, Корея

Поступило
 27 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. В. Морозов, Матем. сборн., 5 (47), 357 (1939). ² Е. Б. Дынкин, ДАН, 75, 333 (1950). ³ Н. Г. Чеботарев, Теория групп Ли, М. — Л., 1940.