

Р. М. ГЕЙДЕЛЬМАН

К ТЕОРИИ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА ОКРУЖНОСТЕЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 28 VIII 1954)

1. Рассмотрим в трехмерном конформном пространстве M_3 семейство окружностей, зависящее от трех параметров — трехпараметрический комплекс окружностей, — и отнесем его к подвижному конформному реперу Картана ^(1, 2) так, чтобы окружность комплекса образовалась пересечением сфер S_2 и S_3 репера.

Уравнения инфинитезимальных перемещений элементов этого репера имеют вид:

$$dS_\alpha = \omega_\alpha^\beta S_\beta \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, 4). \quad (1)$$

Компоненты ω_α^β репера Картана — формы Пфаффа от параметров конгруэнции — удовлетворяют соотношениям ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} \omega_j^i &= -\omega_i^j; & \omega_i^i &= 0; & \omega^4 &= \omega_4^0 = 0; \\ \omega_4^4 &= -\omega_0^0; & \omega_i^4 &= -\omega^i; & \omega_4^i &= -\omega_i^0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (2)$$

Главными формами, при равенстве нулю которых окружность $[S_2S_3]$ комплекса будет фиксированной, будут формы $\omega^2, \omega^3, \omega_1^2, \omega_1^3, \omega_2^0, \omega_3^0$, между которыми на комплексе будет 3 линейных соотношения.

Форма $I_4 = (\omega_3^0\omega^2 - \omega_2^0\omega^3)^2 - 2(\omega_1^0\omega^2 - \omega_1^0\omega^3)(\omega_3^0\omega_1^2 - \omega_2^0\omega_1^3)$ является абсолютным инвариантом комплекса, равенство нулю которого на любой конгруэнции комплекса определяет 4 семейства разvertyающихся поверхностей этой конгруэнции ⁽²⁾. Эта конгруэнция будет конгруэнцией K ⁽²⁾, если I_4 на ней будет квадратом квадратичной формы.

Через окружность комплекса $[S_2S_3]$ проходят три канальных поверхности комплекса, огибающих однопараметрические семейства сфер, которые мы будем называть фокальными.

Примем за основные формы ω_1^2, ω^2 и ω^3 . Каноизируем репер следующим образом: в качестве сферы S_3 репера примем одну из фокальных сфер, а точки S_0 и S_4 репера поместим в точки пересечения окружности $[S_2S_3]$ с бесконечно близкой при смещении в другой канальной поверхности.

В этом каноническом репере комплекс определяется уравнениями

$$\omega_3^0 = c_3^0\omega^3; \quad \omega_2^0 = b_2^0\omega^2 + c_2^0\omega^3; \quad \omega_1^2 = a_1^2\omega^3 + b_1^2\omega^2 + c_1^2\omega^3. \quad (3)$$

Уравнения трех канальных поверхностей комплекса тогда будут

$$\omega^3 = \omega_1^3 = 0; \quad \omega^3 = \omega^2 = 0; \quad \omega_2^0 - c_3^0\omega^2 = c_2^0\omega^3 + (b_2^0 - c_3^0)\omega_1^2 = 0, \quad (4)$$

а соответствующие фокальные сферы будут

$$S_3; \quad S_3 - \frac{1}{a_1^2} S_2; \quad S_3 + \frac{b_2^0 - c_3^0}{c_2^0} S_2. \quad (5)$$

Продолжения уравнений (3) имеют вид (3)

$$\begin{aligned} c_3^0 \omega^1 - \omega_1^0 &= \alpha \omega_1^3 + \beta \omega^2 + \gamma \omega^3; & (b_2^0 - c_3^0) \omega_2^3 &= \beta \omega_1^3 + \delta \omega^2 + \omega^3; \\ \Delta c_3^0 &= \gamma \omega_1^3 + \varepsilon \omega^2 + \kappa \omega^3; & a_1^2 (b_2^0 \omega^1 - \omega_1^0) + c_2^0 \omega^1 &= \alpha_1 \omega_1^3 + \beta_1 \omega^2 + \gamma_1 \omega^3; \\ \Delta b_2^0 &= \beta_1 \omega_1^3 + \delta_1 \omega^2 + \varepsilon_1 \omega^3; & \Delta c_2^0 &= \gamma_1 \omega_1^3 + \varepsilon_1 \omega^2 + \kappa_1 \omega^3; \\ \Delta a_1^2 &= \alpha_2 \omega_1^3 + \beta_2 \omega^2 + \gamma_2 \omega^3; \\ \Delta b_1^2 &= \beta_2 \omega_1^3 + \delta_2 \omega^2 + \varepsilon_2 \omega^3; & \Delta c_1^2 &= \gamma_2 \omega_1^3 + \varepsilon_2 \omega^2 + \kappa_2 \omega^3. \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда видно, что произвол комплекса — 3 функции 3 аргументов.

2. Комплекс окружностей будет обладать дупараметрическими фокальными семействами — конгруенциями K (фокальными конгруенциями по терминологии Б. А. Розенфельда (4)), если уравнение, определяющее эту конгруенцию на комплексе

$$\omega^3 = 0; \quad \omega_2^0 = c_3^0 \omega^2 \quad \text{или} \quad \{a_1^2 (c_3^0 - b_2^0) - c_2^0\} \omega_1^3 + \{b_1^2 c_2^0 + c_1^2 (c_3^0 - b_2^0)\} \omega^3 = 0$$

будет вполне интегрируемо в силу уравнений комплекса (3) и (6).

Комплекс может иметь 1, 2, 3 семейства конгруенций K , т. е. 1, 2, 3 способами разлагаться на ∞^1 конгруенций K .

Комплекс разлагается на ∞^1 конгруенций K $\omega^3 = 0$, если

$$\beta_1 (b_2^0 - c_3^0) + c_2^0 \beta = 0. \quad (7)$$

Комплекс расслаивается на ∞^1 конгруенций K $\omega_2^0 = c_3^0 \omega^2$, если

$$\begin{aligned} \frac{a_1^2}{c_2^0} \{c_2^0 \beta + \gamma (c_3^0 - b_2^0)\} + \frac{1}{b_2^0 - c_3^0} \{(c_3^0 - b_2^0) \gamma - c_2^0 \beta\} - \\ - \frac{\alpha}{c_2^0} \{b_1^2 + c_1^2 (c_3^0 - c_2^0)\} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

а) Если на комплексе $a_1^2 = 0$, то первое и второе семейства каналовых поверхностей ортогональны — они огибают ортогональные фокальные сферы S_3 и S_2 . Произвол этого комплекса — 2 функции 3 аргументов. Если при этом выполняется соотношение (7), то комплекс расслаивается на ∞^1 конгруенций R (циклических систем Рибокура) $\omega^3 = 0$. Если $c_2^0 = 0$, то комплекс того же типа — у него ортогональны 1-е и 3-е семейства каналовых поверхностей.

б) Если на комплексе $b_2^0 = c_3^0$, то 1-е и 3-е семейства каналовых поверхностей сдвоены. Если $a_1^2 = \frac{c_2^0}{c_3^0 - b_2^0}$, то 2-е и 3-е семейства каналовых поверхностей сдвоены. Комплексы этого типа существуют с произволом 2 функций 3 аргументов. Если при этом выполняется соотношение (8), то комплекс расслаивается на ∞^1 конгруенций K со сдвоенным семейством каналовых поверхностей.

в) При $a_1^2 = c_2^0 = 0$ 2-е и 3-е семейства каналовых поверхностей сдвигаются и ортогональны 1-му семейству. Произвол существования этих комплексов — 1 функция 3 аргументов.

г) Если $c_2^0 = 0$ и $b_2^0 = c_3^0$, то уравнение для определения фокальных сфер обращается в тождество. Дифференцируя внешним образом уравнения $\omega_3^0 = c_3^0 \omega^3$ и $\omega_2^0 = c_3^0 \omega^2$, получим:

$$c_3^0 \omega^1 - \omega_1^0 = \alpha \omega_1^3 + \gamma \omega^3; \quad \Delta c_3^0 = \gamma \omega_1^3 + \kappa \omega^3,$$

причем:

$$a_1^2 \gamma = \alpha c_1^2; \quad \gamma = -b_1^2 \alpha; \quad \kappa = -b_1^2 \gamma.$$

Отсюда: 1) или $c_1^2 = -a_1^2 b_1^2$, 2) или $\alpha = \gamma = \kappa = 0$.

В первом случае комплекс представляет ∞^3 окружностей, проходящих через соответственные пары точек двух кривых. Во втором случае все окружности комплекса ортогональны одной сфере. У комплекса второго типа все конгруенции представляют конгруенции K , ортогональные одной сфере ⁽²⁾. У этих конгруенций на фокальных поверхностях одной пары соответствуют линии кривизны, и эти фокальные поверхности находятся в конформном соответствии. Эти комплексы существуют с произволом 1 функции 3 аргументов.

д) Если на комплексе $b_2^0 = 0$ или $c_3^0 = 0$, то точка S_4 описывает поверхность и все окружности комплекса касаются этой поверхности. Произвол этих комплексов — 2 функции 3 аргументов.

3. Комплексы $\beta = \beta_1 = 0$ назовем комплексами Γ . Произвол существования комплексов Γ — 1 функция 3 аргументов.

Теорема. Комплексы Γ разлагаются на однопараметрическое семейство конгруенций K $\omega^3 = 0$, у которых линии кривизны на фокальных поверхностях одной пары соответствуют и высекаются каналовыми поверхностями конгруенции (конгруенции Γ ⁽²⁾).

Фокус S_0 конгруенции K $\omega^3 = 0$ комплекса Γ опишет триортогональную систему, если выполняется соотношение

$$a_1^2 (\gamma_1 - a_1^2 \gamma) = c_1^2 (\alpha_1 - a_1^2 \alpha).$$

При подходящей нормировке точки S_0 эти комплексы определяются уравнениями

$$\omega_3^0 = c_3^0 \omega^3; \quad \omega_2^0 = b_2^0 \omega^2 + c_2^0 \omega^3; \quad \omega_1^2 = a_1^2 \omega^1 + b_1^2 \omega^2 \quad (9)$$

и их продолжениями

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= \omega^1 + c_1^3 \omega^3; & (b_2^0 - c_3^0) \omega_2^3 &= \delta \omega^2 + \varepsilon \omega^3; & \omega_1^0 &= a_1^0 \omega^1 + c_1^0 \omega^3; \\ \overline{\Delta c_3^0} &= \varepsilon \omega^2 + \kappa \omega^3; & \Delta b_2^0 &= \delta_1 \omega^2 + \varepsilon_1 \omega^3; & \overline{\Delta c_2^0} &= \varepsilon_1 \omega^2 + \kappa_1 \omega^3. \end{aligned} \quad (10)$$

Второй фокус S_4 той же пары конгруенции Γ $\omega^3 = 0$ опишет при этом тоже триортогональную систему, если

$$a_1^2 b_2^0 c_1^0 + b_1^2 c_2^0 a_1^0 = 0. \quad (11)$$

В этом случае комплекс реализует преобразование триортогональной системы (S_0) в систему (S_4), причем поверхности семейств $\omega^3 = 0$ находятся в соответствии Рибокура — они огибают ∞^2 сфер S_3 , и главные сети на них соответствуют.

Укажем следующие 4 типа таких комплексов:

а) $a_1^2 = b_1^2 = 0$. Эти комплексы, у которых оба фокуса одной пары конгруенции $\omega^3 = 0$ описывают триортогональные системы, существуют с произволом 5 функций 1 аргумента. Конгруенции $\omega^3 = 0$ представляют конгруенции B (специальные типы циклических систем), фокусы у которых гармонически делят окружность, а фокальные поверхности (S_0) и (S_4) представляют циклиды Дюпена ⁽²⁾. С метрической точки зрения это преобразование триортогональных систем было рассмотрено Дарбу ⁽⁵⁾.

б) $a_1^2 = c_2^0 = c_1^2 = 0$. Эти комплексы существуют с произволом 2 функций 2 аргументов. Они разлагаются на ∞^1 циклических систем Рибокура $\omega^3 = 0$, у которых фокальные поверхности (S_0) и (S_4) несут семейство сферических линий кривизны $\omega^2 = 0$. Поверхности семейства $\omega^2 = 0$ обеих систем представляют сферы S_2 , и преобразование переводит триортогональную систему (S_0) саму в себя.

в) $b_1^2 = c_1^0 = 0$. Дифференцируя внешним образом уравнение $\omega_1^2 = a_1^2 \omega^1$, получим $c_1^3 \delta = 0$. $c_1^3 = 0$ дает рассмотренный тип комплекса, преобразующий систему (S_0) с семейством сфер S_1 ($\omega^1 = 0$) саму в себя.

При $\delta = 0$ получаем комплекс, у которого семейство окружностей $[S_1, S_3]$ описывает циклическую систему Рибокура, а поверхности $\omega^2 = 0$ системы S_0 и $\omega_2^0 = 0$ системы (S_4) являются ее ортогональными поверхностями. Комплекс переводит триортогональную систему R (S_0) в ту же систему R (S_4). Произвол существования комплекса этого типа — 2 функции 2 аргументов.

г) $c_2^0 = c_1^0 = 0$. Произвол существования этих комплексов — 3 функции 2 аргументов. У рассматриваемых комплексов системой (S_0) может быть произвольная триортогональная система, и комплекс тремя способами разлагается на ∞^1 конгруэнций K $\omega^1 = 0$; $\omega^2 = 0$; $\omega^3 = 0$. Комплекс этого типа реализует преобразование триортогональной системы (S_0) в систему (S_4) посредством преобразований Рибокура любого семейства поверхностей (S_0) $\omega^i = 0$ ($i = 1, 2, 3$), так как на всех трех семействах поверхностей $\omega^1 = 0$; $\omega^2 = 0$; $\omega^3 = 0$ систем (S_0) и (S_4) соответствуют линии кривизны, и они огибают ∞^2 сфер S_1, S_2, S_3 . В метрической дифференциальной геометрии преобразования этого типа рассматривали Дарбу ⁽⁵⁾, Бианки ⁽⁶⁾ и Егоров ⁽⁷⁾.

Московский институт инженеров
железнодорожного транспорта
им. И. В. Сталина

Поступило
12 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ E. Cartan, Ann. de la Soc. Pol. de math., No. 2 (1923). ² Р. М. Гейдельман, Матем. сборн., 29 (71): 2 (1951). ³ С. П. Фиников, Метод внешних форм, М. — Л., 1948. ⁴ Б. А. Розенфельд, Матем. сборн., 23 (65): 2 (1948). ⁵ G. Darboux, Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes, Paris, 1910. ⁶ L. Bianchi, Lesioni de geometria differenziale, Bologna, 2, 1923, p. 2. ⁷ Д. Ф. Егоров, Об одном классе ортогональных систем, М., 1901, стр. 169—175.