

Ф. Д. ГАХОВ и Ю. И. ЧЕРСКИЙ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 9 VII 1954)

§ 1. Рассмотрим особые уравнения типа свертки

$$f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} k_1(x-t)f(t)dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 k_2(x-t)f(t)dt = g(x), \quad (1)$$

$$-\infty < x < \infty;$$

$$f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t)f(t)dt = g(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (2)$$

$$f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(x-t)f(t)dt = g(x), \quad -\infty < x < 0.$$

В классе решений, исчезающих на бесконечности, эти уравнения изучены в работах (1,2). Предполагая ядра $k_1(x)$ и $k_2(x)$ уравнений такими, что

$$k_j(x)e^{-yx} \in L(-\infty, \infty), \quad a_j \leq y \leq b_j, \quad j = 1, 2,$$

будем искать решения уравнений в более широких классах функций.

Аппаратом изучения особых уравнений является преобразование Фурье. Будем обозначать большими буквами преобразования функций, обозначенных соответственными малыми буквами. Значками + или - (внизу) будут обозначены функции со свойствами: $f_+(x) \equiv 0$ при $x < 0$; $f_-(x) \equiv 0$ при $x > 0$; их преобразования обозначаем F^+ и F^- . Основным для исследования является следующее свойство преобразования Фурье для комплексного аргумента z : если

$$k(x)e^{-yx} \in L(-\infty, \infty) \text{ или } L^2(-\infty, \infty), \quad a \leq y \leq b,$$

то преобразование $K(z)$ будет аналитической в полосе $a < \text{Im } z < b$ функцией.

Применение преобразования Фурье к уравнениям (1) и (2) приводит их к краевым задачам теории аналитических функций. В зависимости от расположения полос и полуплоскостей аналитичности преобразованных функций, которое характеризуется величиной постоянных a_1, a_2, b_1, b_2 , будут получены различные краевые задачи.

Для уравнения (1) имеют место два случая:

I. $b_1 > a_2$.

II. $b_1 < a_2$.

Три существенно различных случая будем иметь для уравнения (2):

III. $b_1 < a_2$.

IV. $\min(b_1, b_2) > \max(a_1, a_2)$.

V. $b_2 < a_1$.

Случай $b_1 = a_2$ для уравнения (1) и $\min(b_1, b_2) = \max(a_1, a_2)$ для уравнения (2) приводятся умножением на $e^{-\lambda x}$ к уравнениям, рассмотренным в работах ^(1,2).

§ 2. Случай I. Решение $f \equiv f_+ - f_-$ ищем в классе

$$f_+(x)e^{-yx} \in L^2(-\infty, \infty), y \geq b_1; \quad f_-(x)e^{-yx} \in L^2(-\infty, \infty), y \leq a_2.$$

Тому же классу может принадлежать $g \equiv g_+ - g_-$:

$$g_+(x)e^{-yx} \in L^2(-\infty, \infty), y \geq b_1; \quad g_-(x)e^{-yx} \in L^2(-\infty, \infty), y \leq a_2.$$

Преобразование уравнения (1) дает эквивалентные этому уравнению условия

$$\begin{aligned} [1 + K_1(\xi)] F^+(\xi) - G^+(\xi) &= \Omega(\xi), \quad \xi = x + ib_1, \\ [1 + K_2(\eta)] F^-(\eta) - G^-(\eta) &= \Omega(\eta), \quad \eta = x + ia_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь введена неизвестная функция Ω , аналитическая в полосе $a_2 < \text{Im } z < b_1$. $F^+(z)$ и $F^-(z)$ аналитичны, соответственно, в полуплоскостях $\text{Im } z > b_1$ и $\text{Im } z < a_2$ и исчезают на бесконечности.

Итак, (3) есть краевое условие задачи Римана для сложного контура, состоящего из прямых $\text{Im } z = b_1$ и $\text{Im } z = a_2$. При дополнительных ограничениях (например, условие Гельдера) задача (3) решена в замкнутом виде (см., например, ⁽³⁾).

Аналогично рассматривается:

Случай III. Классы решений и свободных членов таковы:

$$\begin{aligned} f(x)e^{-yx} &\in L^2(-\infty, \infty), \quad b_1 \leq y \leq a_2; \\ g(x)e^{-yx} &\in L^2(-\infty, \infty), \quad b_1 \leq y \leq a_2. \end{aligned}$$

Преобразование Фурье уравнения (2) приводит также к задаче Римана для сложного контура.

§ 3. Случай IV. Классы решений и свободных членов:

$$\begin{aligned} f_+(x)e^{-yx} &\in L^2(-\infty, \infty), \quad y \geq b; \quad f_-(x)e^{-yx} \in L^2(-\infty, \infty), \quad y \leq a; \\ g_+(x)e^{-yx} &\in L^2(-\infty, \infty), \quad y \geq b; \quad g_-(x)e^{-yx} \in L^2(-\infty, \infty), \quad y \leq a; \\ b &= \min(b_1, b_2), \quad a = \max(a_1, a_2). \end{aligned}$$

Для того чтобы преобразовать по Фурье уравнение (2), вводим вспомогательные функции:

$$\psi_-(x) = \dot{f}(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t)f(t)dt - g(x) \equiv T_1 f - g,$$

$$\psi_+(x) = f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(x-t)f(t)dt - g(x) \equiv T_2 f - g,$$

$$\begin{aligned} \omega_1(x) &= T_1 f_+ - g_+ = T_1 f_- - g_- + \psi_-, \\ \omega_2(x) &= T_2 f_- - g_- = T_2 f_+ - g_+ - \psi_+. \end{aligned} \quad (4)$$

Преобразуя (4), получим краевые условия:

$$[1 + K_1(\xi)]F^+(\xi) - G^+(\xi) = \Omega_1(\xi),$$

$$[1 + K_1(\eta)]F^-(\eta) - G^-(\eta) + \Psi^-(\eta) = \Omega_1(\eta),$$

$$[1 + K_2(\xi)][F^+(\xi) - G^+(\xi) - \Psi^+(\xi)] = \Omega_2(\xi),$$

$$[1 + K_2(\eta)]F^-(\eta) - G^-(\eta) = \Omega_2(\eta),$$

$$\xi = x + ib, \quad \eta = x + ia.$$

Путем последовательного исключения двух неизвестных функций F^+ , F^- и введения новой неизвестной функции

$$\Omega(z) = \Omega_1(z)[1 + K_2(z)] - \Omega_2(z)[1 + K_1(z)]$$

удается свести решение к двум задачам Римана для сложного контура и получить решение в замкнутой форме. Результат в этом случае может быть сформулирован так.

Пусть

$$\kappa = \text{Ind}[1 + K_2(x + ia)] - \text{Ind}[1 + K_1(x + ib)];$$

ν — число общих нулей функций $1 + K_1(z)$ и $1 + K_2(z)$ в полосе $a < \text{Im } z < b$. Тогда при $\kappa \geq \nu$ уравнение (2) имеет κ линейно независимых решений; в случае $\kappa < \nu$ уравнение разрешимо лишь при выполнении $\nu - \kappa$ условий, накладываемых на свободный член, и будет иметь ν линейно независимых решений.

§ 4. В случаях II и V в результате преобразования Фурье получаем краевую задачу более сложной природы, решение которой в общем виде неизвестно. До конца могут быть исследованы частные случаи, когда предполагается аналитическая продолжимость функций $K_1(z)$ и $K_2(z)$ внутрь некоторой полосы, причем у этих функций допускаются полярные особенности.

Ростовский на Дону
государственный университет
им. В. М. Молотова

Поступило
6 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. М. Рапопорт, Сборн. тр. Инст. матем. АН УССР, № 12 (1949).
² Ю. И. Черский, Уч. зап. Каз. гос. унив., 113, кн. 10 (1953). ³ Ф. Д. Гахов,
 Л. И. Чибрикова, Уч. зап. Каз. гос. унив., 113, кн. 10 (1953).