

Е. В. ВОРОНОВСКАЯ

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЕЙШИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 7 VII 1954)

В нашей заметке ⁽¹⁾ мы изложили основы предлагаемого нами метода изучения полиномов наименьшего отклонения при помощи функционалов, заданных конечными отрезками чисел.

В настоящей статье мы дадим приложение этого метода к изучению полиномов, принадлежащих простейшим паспортам:

$$[n, [n, 0] \text{ и } [n, n, 1] \text{ *}.$$

1. Теорема 1. В критическом интервале каждого параметра μ_k ($k \geq 0$) отрезка $(\mu_i)_0^n$ (см. теорему 4 ⁽¹⁾) существует число μ_k^* , где $\mu_k^* \leq \mu_k \leq \mu_k^*$, обладающее тем свойством, что если в отрезке положить $\mu_k = \mu_k^*$, то норма отрезка $N(\mu_k)$ получит свое минимальное значение. Если отрезок $(\mu_i)_0^n$ ни при каком значении μ_k не становится абсолютно монотонным, то это число μ_k^* единственное. Оно называется фокусом соответствующего интервала.

Теорема 2. Если в отрезке $(\mu_i)_0^n$ параметр μ_k меняется в своем критическом интервале: $\mu_k^* \leq \mu_k \leq \mu_k^*$, то норма отрезка $N(\mu_k)$ есть непрерывная функция, монотонно убывающая при $\mu_k' \leq \mu_k < \mu_k^*$ и монотонно возрастающая при $\mu_k^* < \mu_k \leq \mu_k^*$. Если при этом обозна-

чить через $Q_n(x) = \sum_{i=0}^n q_i(\mu_k) x^i$ экстремальный полином отрезка $(\mu_i)_0^n$, то $q_k(\mu_k)$ монотонно возрастает во всем интервале, причем слева от μ_k^* имеет место $q_k < 0$, а справа $q_k > 0$.

Теорема 3. Отрезок

$$(\mu_i)_0^n = 0_0, 0_1, \dots, 0_{n-2}, -1_{n-1}, \theta, \quad (1)$$

когда θ меняется в своем критическом интервале $-\frac{n+1}{2} < \theta < -\frac{n-1}{2}$, определяет семейство экстремальных полиномов, принадлежащих паспорту $[n, n, 0]$; фокус этого интервала есть $\mu_n^* = -\frac{n}{2}$. Если экстремальные полиномы, соответствующие числам промежутка $-\frac{n}{2} < \theta < -\frac{n-1}{2}$, обозначить $Q_n(x, \theta)$, то при $-\frac{n+1}{2} < \theta < -\frac{n}{2}$ экстремальные полиномы суть $(-1)^{n-1} Q_n(1-x, \theta)$. Все семейство полиномов паспорта $[n, n, 0]$ исчерпывается полиномами вида

$$\pm Q_n(x, \theta) \text{ и } \pm Q_n(1-x, \theta).$$

* Сохранена терминология статьи ⁽¹⁾.

состоит из $n-1$ эквивалентных отрезков, определяющих каждый одно и то же семейство полиномов $Z_n(x, \theta)$; если положить $Z_n(x, \theta) = \sum_0^n \beta_i(\theta) x^i$, то формулы, связывающие переменные параметры $\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(n-2)}$ с основным параметром θ таковы:

$$\theta^{(n-m-1)} = \frac{\beta'_m(\theta)}{\beta'_n(\theta)} \quad (m = 1, 2, \dots, n-2).$$

Коэффициенты $\alpha_i(\theta)$ резольвенты $R_n(x, \theta)$ отрезка (1) выразятся через β_i при помощи системы отрезков (3) из системы $n-1$ уравнений вида $R_n(\mu, \theta) = 0$, а именно:

$$\alpha_{n-1} = \theta, \quad \alpha_{n-2} = \frac{\beta'_{n-2}(\theta)}{\beta'_n(\theta)}, \dots, \alpha_1 = \frac{\beta'_1(\theta)}{\beta'_n(\theta)}. \quad (4)$$

Кроме дифференциальных зависимостей, между $\alpha_i(\theta)$ и $\beta_i(\theta)$ имеются и алгебраические зависимости, основанные на тождестве

$$R_n(x, \theta) \equiv \frac{\frac{\partial}{\partial x} Z_n(x, \theta)}{n\beta_n x - \frac{\beta_1}{\alpha_1}} x(x-1); \quad (5)$$

из (5) получим $n-2$ зависимости между $(\alpha_i)_2^{n-1}$ и $(\beta_i)_2^{n-1}$. Подставив в них выражения (α_i) из (4), получим $n-2$ дифференциальных уравнения первого порядка для $\beta_i(\theta)$ ($i = 2, 3, \dots, n-1$) с граничными условиями:

$$1) \text{ при } \theta = -\frac{n}{2} \quad \beta_i = -t'_i, \text{ где } \sum_0^{n-1} t'_i x^i = T_{n-1}(x); \quad \beta_n = 0;$$

$$2) \text{ при } \theta = -\frac{n-1}{2 \cos^2(\pi/2n)} \quad \beta_i = c_i, \text{ где } \sum_0^n c_i x^i = T_n(\cos^2 \frac{\pi}{2n} x).$$

Кроме того, имеются еще две зависимости:

$$\sum_0^n \beta_i(\theta) = 1 - (-1)^n; \quad \beta'_{n-1}(\theta) = \theta \beta'_n(\theta) \quad (\beta_0 = (-1)^n).$$

Все эти уравнения определяют коэффициенты $[\beta_i(\theta)]_0^n$, следовательно, и $Z_n(x, \theta)$. (При $n < 3$ таких полиномов не существует.)

3. Полиномы паспорта $[n, n, 1]$ всегда должны иметь два неподвижных узла 0 и 1; кроме того, они должны распадаться на $n-1$ разрядов, в зависимости от того, который из $n-1$ интервалов между узлами $(\sigma_i)_1^n$ полинома является интервалом повторения знака⁽¹⁾. Если этот интервал (σ_k, σ_{k+1}) , то полином принадлежит разряду с номером k .

Само существование таких полиномов устанавливается посредством определяющего отрезка, как видно из следующей теоремы.

Теорема 7. Полиномы паспорта $[n, n, 1]$ разряда k определяются отрезком

$$(-1)^{n-k+1} \cdot 1; (-1)^{n-k+1} \tau_k; (-1)^{n-k+1} \tau_k^2; \dots; (-1)^{n-k+1} \tau_k^{n-1}; \dots \\ \dots (-1)^{n-k+1} \tau_k^n + \theta,$$

где $\tau_k = \cos^2 \frac{(n-k)\pi}{2n}$; $k = 2, 3, \dots, n-2$ и θ меняется в критическом интервале.

Границы критического интервала $(-1)^{n-k+1} \tau_k^n + \theta'$ и $(-1)^{n-k+1} \tau_k^n + \theta''$ получаются при $\theta' = \theta'' = 0$ и $\theta'' = \prod_{i \neq k} |\tau_k - \tau_i|$. Семейство экстремальных полиномов этого отрезка обозначим $W_n(x, \theta)$ или $W_{[n, n, 1, k]}(x, \theta)$, т. е. число k включим в его паспорт.

Полиномы двух крайних разрядов $k=1$ и $k=n-1$ не могут быть определены столь простым образом, и мы здесь не останавливаемся на них за недостатком места.

Переходя к вопросу об аналитическом выражении изучаемых полиномов, мы сначала выделим те случаи, когда $W_{[n,n,1,k]}(x, \theta)$ может быть выражен посредством полинома Чебышева.

Теорема 8. Для любых полиномов паспорта $[N, N, 1, K]$, где N и K имеют общий делитель m , справедливо тождество

$$W_{[N,N,1,K]}(x, \theta) \equiv T_m \left[\frac{1 + W_{[n,n,1,k]}(x, \theta)}{2} \right]; \quad N = mn; K = mk.$$

Способ приближенного вычисления полиномов W_n получается и здесь составлением системы эквивалентных отрезков.

Теорема 9. Если для определенности выбрать k так, что $T_n(\tau_k) = -1$, то система отрезков

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & \tau_k, & \tau_k^2, & \dots, & \tau_k^{n-1}, & \tau_k^n + \theta & \\ 1, & \tau_k, & \tau_k^2, & \dots, & \tau_k^{n-1} - \theta^{(1)}, & \tau_k^n & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1, & \tau_k, & \tau_k^2 + (-1)^{n-2}\theta^{(n-2)}, & \dots, & \tau_k^{n-1}, & \tau_k^n & \end{array} \quad (6)$$

$(\theta, \theta^{(1)}, \dots, \theta^{(n-2)})$ — переменные параметры) состоит из $n-1$ эквивалентных отрезков, определяющих каждый одно и то же семей-

ство полиномов $W_{[n,n,1,k]}(x, \theta) = \sum_{i=0}^n \beta_i(\theta) x^i$.

Формулы, выражающие зависимость параметров $\theta^{(m)}$ от основного параметра θ , таковы:

$$\theta^{(m)} = (-1)^{m-1} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_{x=\tau_k} / \beta'_{n-m}(\theta). \quad (7)$$

Все дальнейшие выкладки вполне аналогичны приведенному выше построению полинома $Z_n(x, \theta)$. Для соответствующей системы дифференциальных уравнений имеются граничные условия:

$$\text{при } \theta = \prod_{i \neq k} |\tau_k - \tau_i| \quad \beta_i(\theta) = t_i, \quad \text{где } \sum_{i=0}^n t_i x^i = T_n(x).$$

В заключение заметим, что исследованные полиномы паспорта $[n, n, 1]$ решают следующую экстремальную задачу: из всех полиномов n -й степени со старшим коэффициентом, равным 1, и принимающих в точке σ , где $0 < \sigma < 1$, заданное значение A , найти тот, который на отрезке $[0, 1]$ наименее отклоняется от нуля.

Метод изучения и построения экстремальных полиномов при помощи простейших функционалов применим и к полиномам любого другого паспорта. На очереди стоят полиномы с паспортами $[n, n-1, 0]$, $[n, n-1, 1]$, $[n, n-1, 2]$, исчерпывающими все случаи, когда число узлов $s = n-1$. Семейства таких полиномов зависят от двух переменных параметров. Первое из этих семейств было получено Н. И. Ахиезером⁽³⁾ при помощи конформного отображения; остальные являются новыми.

Ленинградский электротехнический
институт
им. М. А. Бонч-Бруевича

Поступило
20 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Е. В. Вороновская, ДАН, 99, № 1 (1954). ² Е. И. Золотарев, Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля, Полн. собр. соч., в. 2, 1932. ³ Н. И. Ахиезер, Изв. Физ.-матем. общ. при Казанск. унив., сер. 3, 3 (1928).