

М. И. ВИШИК

СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ПЕРВУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ПО ВРЕМЕНИ, И ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ИХ РЕШЕНИЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 5 VII 1954)

1. Смешанные краевые задачи с однородными граничными условиями (1). Пусть в цилиндрической области $Q = D \times (0 < t < l)$, где D — ограниченная область в E^n с границей Γ , дана система дифференциальных уравнений

$$Lu \equiv A_r \left(x, t, \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + B_s \left(x, t, \frac{\partial}{\partial x_i} \right) u = h(x, t), \quad (1)$$

где A_r, B_s — дифференциальные операторы порядков r и s соответственно; $u = (u_1, \dots, u_N)$, $h = (h_1, \dots, h_N)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$.

а) Случай $r = 2m$, $r \geq s$. В этом случае предполагаем, что $A_{2m} = A_{2m}^{(1)} + iA_{2m}^{(2)} + V$ — общий сильно эллиптический (с. э.) оператор (1, 2) с ограниченными коэффициентами. Мы будем называть с. э. оператор, скажем A_{2m} , положительным, если его общая вещественная часть для любого фиксированного t , $0 < t < l$, положительно-определенная в следующем смысле: $\operatorname{Re}(A_{2m}u^0, u^0) \geq \alpha^2 \|u^0\|_W^2$ при любых гладких функциях $u^0(x, t) \in \Omega_0$, т. е. функциях, обращающихся в нуль вблизи Γ ; $(,)$ — обычное скалярное произведение по области D ; $\alpha^2 > 0$ не зависит ни от t , ни от u^0 ; $\| \cdot \|_W$ — норма в пространстве $W_2^{(m)}(0)$ (3).

Смешанная краевая задача (задача I) для системы (1) с нулевыми граничными условиями состоит в нахождении в цилиндре Q ее решения $u(x, t)$, удовлетворяющего при $t = 0$ начальному условию: $u|_{t=0} = \varphi(x)$, а на боковой поверхности $B = \Gamma \times (0 < t < l)$ — нулевым краевым условиям: $u|_B = \dots = u_{x_{i_1} \dots x_{i_{m-1}}}|_B = 0$, где $1 \leq i_s \leq n$.

Мы скажем, что $u \in \Omega_0^{(m)}$, если $u(x, t)$ принадлежит замыканию многообразия функций $u^0(x, t) \in \Omega_0$ в следующей метрике:

$$\{G_m u, G_m u\}_m = \int_0^l \sum_{i=1}^n (u_{x_{i_1} \dots x_{i_m}}^{(m)}, u_{x_{i_1} \dots x_{i_m}}^{(m)}) dt, \quad (2)$$

где $G_m u = (u_{x_{i_1} \dots x_{i_m}}^{(m)})$ — градиент (по x -м) порядка m функции $u(x, t)$, а $(,)$ — обычное скалярное произведение по x -м, взятое по области D (индекс m в левой части (2) мы иногда будем опускать). Таким образом, $\Omega_0^{(m)}$ является областью определения оператора типа градиента G_m , соответствующей нулевым граничным условиям на B . Пространство элементов $G_m u$ с метрикой (2) обозначим через $R_0^{(m)}$. Пространство элементов $G_m f(x, t)$, где $f(x, t)$ может принимать любые значения на B , со скалярным произведением (2) обозначим через $R^{(m)}$.

Функция $u(x, t)$ является решением (обобщенным) задачи I, если $u \in \Omega_0^{(m)}$, $u(x, t)$ имеет производную по t , причем $u'_t \in \Omega_0^{(m)}$, и при лю-

бой функции $v \in \Omega_0^{(m)}$ выполнено интегральное тождество

$$L(u, v) \equiv \left\{ \tilde{A} G_m \frac{\partial u}{\partial t}, G_m v \right\}_m + \{ \tilde{B} G_m u, G_m v \}_m = [h, v], \quad (3)$$

где $\tilde{A} = G_m^{*-1} A_{2m} G_m^{-1}$; $\tilde{B} = G_m^{*-1} B_s G_m^{-1}$, $[,]$ означает обычное скалярное произведение вектор-функций, взятое по Q ($\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — ограниченные операторы ⁽²⁾). Через $L(u, v)$ мы обозначили билинейную форму, стоящую слева в (3). Очевидно, что оба члена в левой части (3) можно выразить в виде интегралов от производных u и v до порядка $\leq m$, умноженных на коэффициенты системы (1). (Отметим, что для $u^0, v^0 \in \Omega_0$ $L(u^0, v^0) = [Lu^0, v^0]$.)

Положим $p(m) = \max(1, 2n/(n+m))$ для $n \neq 2m$ и $p(m) = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, для $n = 2m$.

Теорема 1. Если $r = 2m \geq s$; A_{2m} — общий сильно эллиптический положительный (с. э. п.) оператор; B_s — произвольный дифференциальный оператор порядка s , то смешанная задача I имеет, и притом единственное, решение $u(x, t)$ при любой правой части $h \in L_{p,2}(Q)$ ⁽¹⁾, где $p = p(m)$, и при любых начальных условиях $\varphi(x) \in W_2^{(m)}(0)$.

Производная u'_t от решения u определяется из функционального уравнения $(\tilde{A} + \tilde{B}I)G_m u'_t = V(h, \varphi)$, где I — оператор интегрирования по t в пределах от 0 до t ; $V(h, \varphi)$ выражается через h и φ и непрерывно зависит от этих функций. Имеет место оценка: $\|G_m u\| + \|G_m u'_t\| \leq C(\|h\| + \|\varphi\|_m)$. При $t \rightarrow 0$ $u(x, t)$ стремится в метрике $W_2^{(m)}(0)$ к $G_m \varphi(x)$.

б) Случай $r < s$. Предположим, что $r = 2m$, $s = 2k$. Тогда в смешанной задаче I с нулевыми граничными условиями требуется обращение в нуль на B функции u и всех ее производных до порядка $k-1$. Если A_{2m} — самосопряженный оператор, то под решением смешанной задачи I мы будем понимать такую функцию $u(x, t) \in \Omega_0^{(h)}$, для которой выполнено интегральное тождество

$$-\left\{ G_m u, \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{A} G_m v) \right\}_m + \{ G_k u, \tilde{B}^* G_k v \}_k = [h, v] + (G_m \varphi(x), \tilde{A} G_m v(x, 0)) \quad (4)$$

для любой функции $v(x, t)$, представимой в виде $\int_0^t w(x, \tau) d\tau$ ($t < l$),

где $w(x, t) \in \Omega_0^{(h)}$; $\tilde{A} = G_m^{*-1} A G_m^{-1}$, $\tilde{B}^* = G_k^{*-1} B^* G_k^{-1}$ (см. также ⁽⁴⁾).

Теорема 2. Если $r = 2m < 2k = s$; A_{2m} — самосопряженный с. э. п. оператор; B_{2k} — общий с. э. оператор*, причем коэффициенты этих операторов имеют ограниченную в Q производную по t , то задача I имеет, и притом единственное, решение для любой правой части $h \in L_{p,2}(Q)$, где $p_1 = p(k)$, и любой функции $\varphi(x) \in W_2^{(m)}(0)$. Справедлива оценка: $\|G_k u\| \leq C(\|h(x, t)\| + \|\varphi(x)\|_m)$.

Если, кроме сформулированных выше условий, h имеет производную по t , $h_t \in L_{p,2}(Q)$, а $\varphi(x) \in \Omega_{B_{2k}}$, то решение задачи I имеет (в сильном смысле) производную по t , причем $G_k u'_t \in R_0^{(h)}$, при $t \rightarrow 0$ $G_k u(x, t)$ стремится к $G_k \varphi(x)$ в метрике $W_2^{(h)}$.

Если A_{2m} — общий с. э. оператор, то под решением задачи I мы будем понимать такую функцию $u \in \Omega_0^{(h)}$, для которой $u'_t \in \Omega_0^{(m)}$ и выполнено интегральное тождество

$$\left\{ \tilde{A} G_m \frac{\partial u}{\partial t}, G_m v \right\}_m + \{ \tilde{B} G_k u, G_k v \}_k = [h, v] \quad (5)$$

для любой функции $v \in \Omega_0^{(h)}$; $\tilde{A} = G_m^{*-1} A_{2m} G_m^{-1}$, $\tilde{B} = G_k^{*-1} B_{2k} G_k^{-1}$.

* Мы считаем такие операторы полуограниченными снизу.

Теорема 3. Пусть $r = 2m < s = 2k$; A_{2m} — общий с. э. п. оператор с коэффициентами, имеющими в Q ограниченные первые производные по t ; B_{2k} — с. э. оператор, допускающий представление $B_{2k} = B^{(1)} + B^{(2)}$, где $B^{(1)}$ — самосопряженный с. э. п. оператор, а $B^{(2)}$ — оператор порядка $\leq 2m$. Тогда смешанная задача I имеет, и притом единственное, решение $u(x, t)$ при любой правой части $h(x, t) \in L_{p, 2}(Q)$, где $p_1 = p(k)$, и при любой начальной функции $\varphi(x) \in W_2^{(k)}(0)$; при $t \rightarrow 0$ $G_m u(x, t)$ стремится в метрике $W_2^{(m)}$ к $G_m \varphi(x)$. Справедлива оценка $(\|G_m u_t\| + \|G_k u\|) \leq G(\|\varphi\|_k + \|h\|)$.

2. Аналог метода Галеркина для приближенного решения смешанных задач (1). Приближенное решение задачи I

ищется в виде $\tilde{u}_n(x, t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) u_i(x)$, где $u_i(x)$ принадлежат области определения операторов A и B , причем система $\{u_i(x)\}$ в случае а) является полной в пространстве $W_2^{(m)}(0)$, а в случае б) — в пространстве $W_2^{(k)}(0)$. Неизвестные коэффициенты $c_i(t)$ определяются как решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{i=1}^n (A u_i, u_k) c_i'(t) + \sum_{i=1}^n (B u_i, u_k) c_i(t) = (h, u_k) \quad (k = 1, \dots, n) \quad (6)$$

при начальных условиях $c_i(0) = c_i^{(n)}$ ($i = 1, \dots, n$), выбранных так, чтобы последовательность $\varphi_n(x) = \sum c_i^{(n)} u_i(x)$ сходилась к $\varphi(x)$ (определенным образом).

Теорема 4. 1) Если выполнены условия теоремы 1 и последовательность $G_m \varphi_n(x)$ сходится к $G_m \varphi(x)$ в метрике $W_2^{(m)}$, то последовательность $G_m(\tilde{u}_n)_t$ сходится в метрике $R_0^{(m)}$ (в сильном смысле) к $G_m u_t$, где u — точное решение задачи I (очевидно, отсюда следует сходимость $G_m \tilde{u}_n \rightarrow G_m u, u_n \rightarrow u$).

2) Если выполнены условия первой части теоремы 2 и $G_m \varphi_n(x)$ сходится к $G_m \varphi(x)$ в $W_2^{(m)}$ (хотя бы в слабом смысле), то последовательность $G_k u_n(x, t)$ сходится слабо (в пространстве $R_0^{(k)}$) к $G_k u$.

При выполнении условий второй части теоремы 2 и $G_k \varphi_n \rightarrow G_k \varphi$ в $W_2^{(k)}$ последовательность $G_k \tilde{u}_n$ в сильном смысле сходится к $G_k u$ в $R_0^{(k)}$ (u , значит, $\tilde{u}_n \rightarrow u$)*.

3) Если выполнены условия теоремы 3, причем $G_k \varphi_n$ сходится к $G_k \varphi$ в $W_2^{(k)}$ (хотя бы в слабом смысле), то последовательность $G u_n = (G_m(\tilde{u}_n)_t, G_k \tilde{u}_n)$ сходится в слабом смысле к $G u = (G_m u_t, G_k u)$ в пространстве $R_0 = (R_0^{(m)}, R_0^{(k)})$.

3. Решение смешанной задачи I при неоднородных граничных условиях. Так как задача I для неоднородной системы (1): $Lu = h$ при однородных граничных условиях на B уже рассмотрена, то достаточно здесь ограничиться задачей I для однородного уравнения $Lw = 0$ при неоднородных граничных условиях на B . Мы скажем, что w является решением уравнения $Lw = 0$, если Gw (и, соответственно, Gw_t) $\in R^{(m)}$ или $R^{(k)}$ или R , соответствующее каждому из рассмотренных выше случаев, и $L(w, v) = 0$,

* Отсюда, в частности, следует, что для параболических систем, рассмотренных в (1), соответствующая последовательность приближенных решений $(G_m u_n)$ сильно сходится к точному решению $(G_m u)$.

где $v \in R_0^{(m)}$ или $v \in R_0^{(k)}$ или $v \in R_0$ (при выполнении условий теоремы 2, кроме того, требуется еще, чтобы $v|_{t=0} = 0$). Граничные условия на B мы будем предполагать продолженными во внутрь Q в виде функции $f(x, t)$, причем мы скажем, что функция w принимает на B те же граничные значения, что и $f(x, t)$, если $G(f - w) \in R_0$ (G и R_0 — соответствующие для каждого случая).

Теорема 5. Если выполнены условия теоремы 1, или 2, или 3 и заданная в Q функция $f(x, t)$ обладает, соответственно, следующими свойствами: при условиях теоремы 1 $G_m f'_t \in R^{(m)}$; при условиях первой части теоремы 2* и теоремы 3 $G_m f'_t \in R^{(m)}$, $G_k f \in R^{(k)}$; при условиях второй части теоремы 2 $G_m f''_{tt} \in R^{(m)}$, $G_k f'_t \in R^{(k)}$, то существует решение $w(x, t)$ однородного уравнения $Lw = 0$, принимающее на B такие же значения, как и функция $f(x, t)$, и удовлетворяющее при $t = 0$ тем же начальным условиям, что и $f(x, t)$ (в случае первой части теоремы 2 в слабом смысле, а во всех остальных случаях — в сильном смысле). При этом функция $w(x, t)$ обладает следующими свойствами: в случае условий теоремы 1 $G_m w'_t \in R^{(m)}$; в случае условий первой части теоремы 2 $G_k w \in R^{(k)}$; в случае условий второй части теоремы 2 $G_k w'_t \in R^{(k)}$, в случае теоремы 3 $G_m w'_t \in R^{(m)}$ и $G_k w \in R^{(k)}$.

Во всех случаях функция w определяется как разность $w = f - u$, где $u(x, t) \in R_0^{(m)}$ (или $R_0^{(k)}$ или R_0), $u|_{t=0} = 0$ и $u(x, t)$ находится из интегрального тождества $L(u, v) = L(f, v)$, где v имеет такой же смысл, как в формулах (3), (4), (5), соответственно.

Существование $u(x, t)$ устанавливается методом, аналогичным методу проекций. Приблизительно $u(x, t)$ можно найти таким же методом, как изложенный в п. 2 метод для случая однородных граничных условий. Если через $\{u_i\}$ обозначить систему функций, удовлетворяющую условиям, изложенным в п. 2, то n -е приближение функции

$u(x, t)$ представляется в виде $\tilde{u}_n(x, t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) u_i(x)$, а $c_i(t)$ определяются из системы:

$$\sum_{i=1}^n c'_i(t) (A_i u_i, u_k) + \sum_{i=1}^n c_i(t) (B_i u_i, u_k) = L_t(f, u_k),$$

где форма $L_t(f, u)$ отличается от $L(f, u)$ лишь тем, что в ней опущен интеграл по t . В случае условий первой части теоремы 2 и условий теоремы 3 соответствующие градиенты $G \tilde{u}_n$ слабо сходятся в соответствующем R_0 к $G u$, а во всех остальных случаях имеет место сильная сходимости этой последовательности в R_0 .

4. Относительно поведения решения смешанной задачи I при $t \rightarrow \infty$ имеет место теорема, аналогичная теореме 2 заметки (1).

5. Установлены дифференциальные свойства внутри Q решений $u(x, t)$ рассмотренных выше задач в зависимости от гладкости начальных и граничных условий и дифференциальных свойств коэффициентов (1).

Московский энергетический институт
им. В. М. Молотова

Поступило
2 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. И. Вишик, ДАН, 97, № 2 (1954). ² М. И. Вишик, Матем. сборн., 29 (71): 3, 615 (1951). ³ С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, 1950. ⁴ А. А. Киселев, О. А. Ладыженская, ДАН, 95, № 6 (1954).

* В случае теоремы 2 предполагается еще, что $f|_{t=0} = 0$.