

А. А. СОКОЛОВ и И. М. ТЕРНОВ

К КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

(Представлено академиком В. В. Шулейкиным 18 V 1954)

Как было показано в ряде работ, посвященных теории «светящегося» электрона (¹⁻³) *, излучение электромагнитных волн электроном, движущимся в магнитном поле, становится особенно интенсивным при больших скоростях движения. Радиационные потери энергии естественным образом ведут к сокращению радиуса орбиты вращения электрона.

Квантово-механическое рассмотрение проблемы показывает, что, помимо сокращения радиуса орбиты, излучение возбуждает радиальные колебания электрона (эффект отдачи при излучении), которые приводят к уширению траектории. Эти вопросы для случая движения электрона в постоянном магнитном поле были исследованы нами в (^{4, 5}).

В настоящей заметке, пользуясь методом, разработанным в (^{5, 6}), мы обобщаем наши результаты на случай неоднородного магнитного поля с осевой симметрией, когда магнитное поле вблизи устойчивой орбиты (т. е. при $z = 0$) изменяется по закону

$$H_x = H_y = 0, \quad H_z = H_0 r^{-q}, \quad 0 < q \leq 1. \quad (1)$$

Наши предыдущие результаты мы должны получить, полагая $q = 0$.

Пренебрегая спинowymi эффектами, мы можем воспользоваться релятивистским скалярным волновым уравнением

$$\left\{ E^2 + c^2 \hbar^2 \nabla^2 - e^2 A^2 - \frac{2ech}{i} (A \vec{\nabla}) - m^2 c^4 \right\} \psi = 0, \quad (2)$$

где E — энергия электрона, m — его масса покоя.

В дальнейшем мы ограничимся исследованием движения электрона в плоскости его орбиты вращения, когда решение уравнения (2) следует искать в виде

$$\psi = \frac{e^{il\phi}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \frac{1}{r} u(r). \quad (3)$$

В этом случае радиальные функции u нормируются на единицу

$$\int_0^\infty u^2(r) dr = 1. \quad (4)$$

Азимутальное число l в интересующем нас случае должно принимать большие целые значения ($l \gg 1$).

* В монографии (³) дана подробная литература, связанная с развитием классической теории светящегося электрона.

Волновое уравнение для определения радиальных функций принимает вид

$$u'' + f(r)u = 0. \quad (5)$$

Разложим далее функцию $f(r)$ в ряд Тейлора в окрестности ее максимума $f''(a) = 0$:

$$a = \left[\frac{l}{\gamma(1-q)} \right]^{\frac{1}{2-q}}, \quad (6)$$

ограничиваясь членами, пропорциональными $x^2 = (r-a)^2$. Тогда

$$u'' + (\alpha - \lambda^2 x^2)u = 0, \quad (7)$$

где

$$\alpha = f(a) = \frac{E^2 - m^2 c^4}{c^2 \hbar^2} - \gamma^2 (2-q)^2 a^{2(1-q)}, \quad (8)$$

$$\lambda^2 = -\frac{1}{2} f''(a) = \gamma^2 (2-q)^2 (1-q) a^{-2q}, \quad \gamma = \frac{eH_0}{c\hbar(2-q)}.$$

Из волнового уравнения (7) находим собственные значения энергии и собственные функции, характеризующие радиальные колебания:

$$\frac{\alpha}{\lambda} = 2s + 1, \quad E = c\hbar \sqrt{(2-q) \frac{\gamma}{a^q} \left[\frac{2-q}{1-q} l + (2s+1) \sqrt{1-q} \right] + m^2 c^4}, \quad (9)$$

$$u_s = \sqrt[4]{\frac{\lambda}{\pi}} \frac{1}{V 2^s s!} e^{-\frac{\lambda}{2}(r-a)^2} H_s(V\lambda(r-a)). \quad (10)$$

Здесь H_s — известные полиномы Чебышева — Эрмита; $s = 0, 1, 2, \dots$ — радиальное квантовое число.

Воспользовавшись собственными функциями (10), нетрудно найти выражение для квадратичной флуктуации радиуса, характеризующей ширину траектории:

$$\xi^2 = \overline{x^2} = \int_0^\infty x^2 u_s^2 dr \cong \int_{-\infty}^\infty x^2 u_s^2 dx = \frac{s}{2\gamma'}, \quad (11)$$

где $\gamma' = \frac{eH(a)}{2c\hbar} \sqrt{1-q}$.

Значение для ξ^2 в случае однородного поля ($q=0$) переходит в выражение $\xi^2 = s/2\gamma$, установленное нами ранее (5).

Найдем круговую частоту излучения $\omega_{\nu, \nu'}$ и вероятность $w_{\nu, \nu'}$, характеризующие переходы электрона из состояния l, s в состояние l', s' , ($\nu = l - l'$, $\nu' = s - s'$), сохраняя при этом лишь члены порядка ν^2/l .

$$\omega_{\nu, \nu'} = \omega_0 (\nu + \nu' \sqrt{1-q}), \quad (12)$$

$$w_{\nu, \nu'} = \frac{W_{\nu, \nu'}}{\hbar \nu \omega_0} = \frac{1}{\hbar \nu \omega_0} I_{s, s'}^2(x) \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \frac{e^2 c}{a^2} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^4 y dy \int_y^\infty K_{1/2}(z) dz. \quad (13)$$

Здесь $W_{\nu, \nu'}$ — интенсивность излучения,

$$y = \frac{2}{3} \nu \left(\frac{mc^2}{E} \right)^3, \quad x = \frac{\nu^2}{2(2-q)\sqrt{1-q}} \frac{1}{l}, \quad \omega_0 = \frac{\nu}{a}, \quad (14)$$

а функция $I_{s,s'}(x) = (-1)^{s'} \frac{x^{s'/2} e^{-x/2}}{\sqrt{s! s'!}} Q_{s'}^{s'}(x)$ связана с полиномами Лагерра $Q_{s'}^{s'}$.

Нетрудно заметить, что интенсивность излучения (13) отличается от соответствующего классического выражения (в данном приближении) наличием множителя $I_{s,s'}^2$, который, как мы неоднократно показывали (см., например (5)), при суммировании по всем конечным радиальным переходам обращается в единицу, поэтому

$$W_v = \sum_{s'} W_{v,s'} = W_{\text{класс.}} \quad (15)$$

Для случая постоянного магнитного поля ($q=0$) нами было показано (5), что квантовые поправки к интенсивности излучения и сжатию радиуса по сравнению с классическими величинами имеют порядок $\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 \frac{\hbar}{mca}$, т. е. на фоне больших соответствующих классических величин они могут стать сравнимыми с последними лишь в области энергий $\sim E_{1/2} = mc^2 \left(\frac{mca}{\hbar}\right)^{1/2}$. В связи с этим особый интерес представляет вопрос об изменении ширины траектории (квадратичная флуктуация радиуса), которая характеризуется радиальным квантовым числом s .

В самом деле, как видно из формулы (11), при адиабатическом увеличении магнитного поля $H(a)$ величина s должна оставаться без изменений. Поэтому квадрат ширины траектории должен уменьшаться (см. (7)) обратно пропорционально $H(a)$, поскольку, согласно (11), $\xi^2 H(a) = \frac{sch}{eV\sqrt{1-q}} = \text{const.}$ Однако, как нами было показано в случае

однородного поля, начиная с энергий порядка $E \sim E_{1/2} = mc^2 \left(\frac{mca}{\hbar}\right)^{1/2}$ возможны чисто квантовые переходы с изменением радиального числа s . Эти переходы должны приводить (в противоположность классической теории) к увеличению квадрата ширины траектории ξ^2 , причем квантовый эффект уширения траектории уже при сравнительно низких энергиях $E = \alpha E_{1/2}$ ($\alpha \sim 2$ или 3) начнет перекрывать классическое сжатие ширины траектории. Этот эффект уширения траектории связан с увеличением амплитуды радиальных колебаний вследствие отдачи при излучении фотонов.

Соответствующие формулы для увеличения ξ^2 были получены при рассмотрении движения электрона в однородном и постоянном магнитном поле (5). В настоящей статье мы обобщаем эти формулы на случай магнитного поля с осевой симметрией, адиабатически изменяющегося во времени. В этом случае, согласно (11) и (13), имеем:

$$ds = - \sum_{v,s'} v' w_{v,s'} dt = \frac{55}{48\sqrt{3}} \frac{[e^2]}{mcr^2} \left(\frac{E}{mc^2}\right)^6 \frac{dt}{(1-q)^{3/2}}, \quad (16)$$

где $v' = s - s'$. Принимая далее во внимание соотношение

$$\sum (s' - s) I_{s,s'}^2(x) = x = \frac{v^2}{2(2-q)\sqrt{1-q}}, \quad (17)$$

из последней формулы получим выражение, характеризующее изменение ширины траектории:

$$\xi^2 = \xi_0^2 \frac{\beta(0) E(0) r}{E(t) a} + \frac{55}{48\sqrt{3}} \frac{e^2 \hbar r}{m(1-q)^2 E(t)} \int_0^t \left(\frac{E(t)}{mc^2}\right)^6 \frac{1}{r^2} dt. \quad (18)$$

Последнее выражение при $q=0$ дает изменение ξ^2 для случая постоянного и однородного магнитного поля, найденное нами ранее⁽⁵⁾. В (18) $\beta(0)$ и $E(0)$ представляют собой, соответственно, начальную скорость и начальную энергию электрона.

Из формулы (18) видно, что с увеличением энергии первый член, который кстати сказать, может быть получен методами классической теории, дает уменьшение квадрата ширины траектории обратно пропорционально энергии; второй же член, который может быть получен лишь методами квантовой теории, наоборот, дает уширение для величины ξ^2 пропорционально E^5 .

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
25 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Д. Иваненко, И. Померанчук, ДАН, 44, 343 (1944). ² Д. Иваненко, А. Соколов, ДАН, 59, 1551 (1948). ³ Д. Иваненко, А. Соколов, Классическая теория поля, 1951. ⁴ А. А. Соколов, Н. П. Клепиков, И. М. Тернов, ДАН, 89, 665 (1952); ЖЭТФ, 24, 249 (1954). ⁵ А. А. Соколов, И. М. Тернов, ДАН, 92, 537 (1953); ЖЭТФ, 25, 698 (1953). ⁶ А. А. Соколов, Н. П. Клепиков, И. М. Тернов, ЖЭТФ, 23, 632 (1952). ⁷ D. Kerst, R. Serber, Phys. Rev., 60, 53 (1941); Научно-реферативн. сборн. Бетатрон, ИЛ, 1948.