

А. А. АБРИКОСОВ, А. Д. ГАЛАНИН и И. М. ХАЛАТНИКОВ

ФУНКЦИИ ГРИНА В ТЕОРИИ МЕЗОНОВ СО СЛАБОЙ ПСЕВДОСКАЛЯРНОЙ СВЯЗЬЮ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 15 VI 1954)

В работе ⁽¹⁾ была изложена общая программа устранения расхождений в теории квантовых полей, которая затем в ^(1, 2) была применена к электродинамике. В настоящей статье мы проведем эту программу в теории псевдоскалярных мезонов со слабым псевдоскалярным взаимодействием. Как и в электродинамике, мы найдем выражения для основных функций: $G(p)$ — гриновской функции нуклона, $D(k)$ — гриновской функции мезона и связанной с ними вершинной части $\Gamma(p, q; l)$ от пространственных векторов p, q и l . Основные уравнения аналогичны выведенным в ⁽¹⁾ и имеют вид:

$$\Gamma_{\sigma}(p, p-l; l) = \tau_{\sigma}\gamma_5 + \frac{g_1^2}{\pi i} \int \Gamma_{\mu}(p, p-k; k) G(p-k) \Gamma_{\sigma}(p-k, p-k-l; l) \times \\ \times G(p-k-l) \Gamma_{\nu}(p-k-l, p-l; -k) D_{\mu\nu}(k) d^4k, \quad (1)$$

$$G(p) \left\{ \hat{p} - M_1 - \frac{g_1^2}{\pi i} \int \Gamma_{\mu}(p, p-k; k) G(p-k) \tau_{\nu}\gamma_5 D_{\mu\nu}(k) d^4k \right\} = 1, \quad (2)$$

$$D_{\mu\tau}(k) \left\{ (k^2 - \mu^2) \delta_{\tau\nu} + \right. \\ \left. + \frac{g_1^2}{\pi i} \text{Sp} \left[\int G(p) \Gamma_{\tau}(p, p-k; k) G(p-k) \tau_{\nu}\gamma_5 d^4p \right] \right\} = \delta_{\mu\nu}. \quad (3)$$

В этих уравнениях применены следующие обозначения: $\gamma_5 = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0$ ($\gamma_{1;2;3} = \beta\alpha_{1;2;3}$, $\gamma_0 = \beta$); M_1 — „собственная масса“ нуклона, g_1 — константа, зависящая от радиуса „обрезания“; греческие индексы $\mu = 1, 2, 3$ в данном случае характеризуют проекции в изотопическом пространстве; τ_{μ} — операторы изотопического спина; отметим также, что Sp в уравнении (3) берется как по дираковским, так и по изотопическим матрицам. Из последнего уравнения нетрудно видеть, что $D_{\mu\nu}(k) = \delta_{\mu\nu}D(k)$. Это дает нам возможность исключить из уравнений операторы τ_{μ} , введя $\Gamma_{\mu} = \tau_{\mu}\Gamma$. После этого уравнения примут вид:

$$\Gamma(p, p-l; l) = \\ = \gamma_5 - \frac{g_1^2}{\pi i} \int \Gamma(p, p-k; k) G(p-k) \Gamma(p-k, p-k-l; l) \times \\ \times G(p-k-l) \Gamma(p-k-l, p-l; k) D(k) d^4k, \quad (4)$$

$$G(p) \left\{ \hat{p} - M_1 - \frac{3g_1^2}{\pi i} \int \Gamma(p, p-k; k) G(p-k) \gamma_5 D(k) d^4k \right\} = 1, \quad (5)$$

$$D(k) \left\{ (k^2 - \mu^2) + \frac{2g_1^2}{\pi i} \text{Sp} \left[\int G(p) \Gamma(p, p-k; k) G(p-k) \gamma_5 d^4 p \right] \right\} = 1. \quad (6)$$

Здесь Sp берется только по дираковским матрицам.

Мы найдем из этих уравнений асимптотическую форму функций G , D и Γ . Будем искать функции $G(p)$ и $D(k)$ при больших импульсах $p \gg M$ и $k \gg M$ в виде

$$G(p) = \frac{\beta(p^2)}{p - M(p^2)}, \quad D(k) = \frac{d(k^2)}{k^2}. \quad (7)$$

Несмотря на то, что $M(p^2) \ll p$, функция $M(p^2)$, как уже было указано в (4), может быть найдена, так как дает четную часть функции $G^{-1}(p)$; что же касается функции $\mu(k^2)$, то определение этой функции при нашем рассмотрении невозможно, так как она не отделяется от гораздо большего k^2 . Ввиду этого можно ограничиться для $D(k)$ формой (7).

Функция Γ в случае, когда p , q и l одного порядка или два из них больше третьего, дается формулой $\Gamma = \gamma_5 \alpha(f^2)$, где f — наибольший из векторов. Принимая во внимание, что интеграл в формуле (4) является логарифмическим в области $f^2 \ll k^2 < \infty$, можно написать уравнение для α в виде

$$\alpha(\xi) = 1 + \frac{g_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^L d(z) \alpha^3(z) \beta^2(z) dz. \quad (8)$$

Здесь $\xi = \ln(-p^2/M^2)$, $L = \ln(-P^2/M^2)$, где P — импульс, соответствующий радиусу „обрезания“.

Ввиду того, что выражение в интеграле уравнения (5) содержит в знаменателе k^3 , надо учесть члены первого порядка по p/k в $G(p-k)$ и $\Gamma(p, p-k; k)$. Эти члены в G получаются непосредственно из формулы (7), а в Γ — из уравнения (4), наподобие того, как это делалось в (2).

Находя изменения, происходящие в интеграле уравнения (4) от $G(p-k)$, нетрудно увидеть, что добавки к Γ должны иметь вид

$$\alpha(l^2) \beta(l^2) \left[\frac{\hat{p} \hat{l}}{l^2} \Delta_1(p^2, l^2) + \frac{\hat{l}}{l^2} \Delta_2(p^2, l^2) \right] \gamma_5. \quad (9)$$

Здесь первый член в скобке характеризует четную, а второй — нечетную добавку к Γ . Приравнявая четные и нечетные части выражений в уравнении (4), находим уравнения для Δ_1 и Δ_2 :

$$\Delta_1(\xi, \eta) = \frac{g_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\eta} \alpha^2(z) \beta^2(z) d(z) \Delta_1(\xi, z) dz - \frac{g_1^2}{8\pi} \int_{\xi}^{\eta} \alpha(z) \beta(z) d(z) dz; \quad (10)$$

$$\Delta_2(\xi, \eta) = \frac{g_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\eta} \alpha^2(z) \beta^2(z) d(z) \Delta_2(\xi, z) dz - \frac{g_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\eta} \alpha(z) \beta(z) M(z) d(z) dz. \quad (11)$$

Здесь $\xi = \ln(-p^2/m^2)$, $\eta = \ln(-l^2/m^2)$.

Подставляя формулу (9) в уравнение (5), мы замечаем, что при этом появляются те же интегралы, что и в формулах (10) и (11), но взятые в пределах от ξ до L , т. е., соответственно, $\Delta_1(\xi, L)$ и $\Delta_2(\xi, L)$. Отделяя четную и нечетную части получившегося уравнения, получаем два уравнения

$$\frac{1}{\beta(\xi)} = 1 - 3\Delta_1(\xi, L); \quad (12)$$

$$\frac{M(\xi)}{\beta(\xi)} = [M_1 + 3\Delta_2(\xi, L)]. \quad (13)$$

Полученные уравнения (8), (10) — (13) не составляют еще полной системы, так как в них входит величина $d(\xi)$, для которой мы еще не написали уравнения. Тем не менее, из этих уравнений мы можем определить связь между функциями $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$ и $M(\xi)$.

Продифференцировав уравнение (9), получаем

$$\frac{d\alpha(\xi)}{d\xi} = -\frac{g_1^2}{4\pi} \alpha^3(\xi) \beta^2(\xi) d(\xi). \quad (14)$$

Введя новые функции $r_1(\xi, \eta) = \alpha(\eta) \Delta_1(\xi, \eta)$ и $r_2(\xi, \eta) = \alpha(\eta) \Delta_2(\xi, \eta)$, продифференцировав уравнения (10) и (11) и воспользовавшись уравнением (14), получаем

$$\frac{\partial r_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\frac{g_1^2}{8\pi} \alpha^2(\eta) \beta(\eta) d(\eta), \quad (15)$$

$$\frac{\partial r_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{g_1^2}{4\pi} \alpha^2(\eta) \beta(\eta) d(\eta) M(\eta); \quad (16)$$

согласно (10) и (11) $r_1(\xi, \eta)$ и $r_2(\xi, \eta)$ должны обращаться в нуль при $\xi = \eta$, т. е. имеют вид интегралов от ξ до η . Ввиду этого $\partial r_1(\xi, \eta)/\partial \xi$ и $\partial r_2(\xi, \eta)/\partial \xi$ выражаются правыми частями формул (15) и (16), взятymi с обратным знаком и с переменной ξ вместо η .

Продифференцируем теперь уравнения (12) и (13) по ξ . Подставляя выражения для производных $r_{1,2}$ по ξ (ввиду $\alpha(L) = 1$ $\Delta_{1,2}(\xi, L) = r_{1,2}(\xi, L)$), имеем:

$$\frac{d\beta(\xi)}{d\xi} = \frac{3g_1^2}{8\pi} \alpha^2(\xi) \beta^3(\xi) d(\xi), \quad (17)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{M(\xi)}{\beta(\xi)} \right] = -\frac{3g_1^2}{4\pi} \alpha^2(\xi) \beta(\xi) d(\xi) M(\xi). \quad (18)$$

Сравнивая уравнения (17) и (14) и принимая во внимание $\beta(L) = 1$, согласно (12), сразу получаем:

$$\alpha(\xi) = [\beta(\xi)]^{-1/3}; \quad (19)$$

$$\frac{d\beta}{d\xi} = \frac{3g_1^2}{8\pi} [\beta(\xi)]^{1/3} d(\xi). \quad (20)$$

Сравнивая уравнения (17) и (18) и принимая во внимание, что, согласно (13), $M(L) = M_1$, получаем

$$M(\xi) = \frac{M_1}{\beta(\xi)}. \quad (21)$$

Теперь перейдем к нахождению уравнения для $d(\xi)$. Для этого рассмотрим уравнение (6). Нетрудно видеть, что выражение в интеграле содержит в знаменателе p^2 . Ввиду этого необходимо учесть члены разложения подинтегральных выражений вплоть до порядка k^2/p^2 , наподобие того как это делалось в (2). При этом члены нулевого порядка приводят к квадратично расходящемуся интегралу, который не зависит от k и может быть включен в „собственную“ массу мезона.

Соответствующие члены из $G(p - k)$ получаются непосредственно разложением формулы (7). Что же касается добавок, происходящих от Γ , то они находятся из уравнения (4), причем в интеграле следует сделать замену переменных $k' = p - k$ (2). Находя изменения интеграла, происходящие от добавок к G , приходим к выводу, что добавку к Γ следует искать в виде

$$\frac{l^2}{p^2} \alpha^2(p^2) d(p^2) \Delta(p^2, l^2). \quad (22)$$

Действуя далее аналогично предыдущему приходим к соотношению

$$d(\eta) = [\beta(\eta)]^{1/2}. \quad (23)$$

Подставив (23) в уравнение (20) и приняв во внимание $\beta(L) = 1$, получим

$$\beta(\xi) = \left[1 - \frac{5g_1^2}{4\pi} (\xi - L) \right]^{-2/10}. \quad (24)$$

Функции $\alpha(\xi)$ и $d(\xi)$ получаются при помощи (19) и (23): $\alpha = Q^{1/2}$, $d = Q^{-1/2}$, где $Q = 1 - \frac{5g_1^2}{4\pi} (\xi - L)$.

Рассматривая теперь какой-либо конкретный процесс (например, комптон-эффект), приходим к выводу, что роль константы связи g^2 играет $g_1^2 \alpha^2(0) \beta^2(0) d(0)$, т. е.

$$g_1^2 = \frac{g^2}{1 - \frac{5g^2}{4\pi} L}. \quad (25)$$

Подставляя (24) в (21) и определяя $M(\xi = 0)$ как истинную массу нуклона, находим

$$M_1 = M \left(\frac{g^2}{g_1^2} \right)^{1/10}. \quad (26)$$

Результаты близки к полученным в электродинамике. Как и в электродинамике, эффективная константа связи g_1^2 растет с увеличением p^2 . Таким образом, даже слабая связь при больших p^2 переходит в сильную.

В заключение выражаем глубокую благодарность акад. Л. Д. Ландау за интерес к работе и ценные указания.

Институт физических проблем
им. С. И. Вавилова
Академии наук СССР

Поступило
25 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ДАН, 95, № 3 (1954). ² Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ДАН, 95, № 4 (1954); 95, № 6 (1954); 96, № 2 (1954).