

П. К. РАШЕВСКИЙ

О ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ НЕПОЛУПРОСТЫХ ГРУПП ЛИ С НИЛЬПОТЕНТНЫМ РАДИКАЛОМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 29 V 1954)

Мы рассмотрим общую схему построения конечномерных линейных представлений группы Ли G с нильпотентным радикалом.

1°. Пусть в алгебре Ли E полупростая компонента образует плоскость S , а нильпотентный радикал — плоскость R . На этой плоскости выберем аффинный базис e_α , координаты какого-либо вектора $a \in R$ в этом базисе обозначаем a^α (греческие индексы пробегают значения $1, 2, \dots, n_R$, где n_R — размерность R).

Коммутатор векторов $a(a^\alpha)$, $b(b^\beta)$ представляет собой вектор $c(c^\gamma)$, $c^\gamma = C_{\alpha\beta}^\gamma a^\alpha b^\beta$, где $C_{\alpha\beta}^\gamma$ — структурные константы радикала R .

Преобразования присоединенной группы, принадлежащие полупростой компоненте S (коротко: преобразования S), вызывают аффинные преобразования на плоскости R

$$\bar{a}^\beta = A_\alpha^\beta a^\alpha, \quad (1)$$

переводящие каждый вектор a^α в новый вектор. Соответственно этому каждый ковариантный вектор b_λ будем преобразовывать по закону

$$\bar{b}_\mu = \bar{A}_\mu^\lambda b_\lambda, \quad (2)$$

где $\bar{A}_\mu^\lambda$ — матрица, обратная A_α^β . Для тензоров общего вида повторяем преобразование (1) для каждого верхнего индекса и преобразование (2) для каждого нижнего индекса.

Преобразования (1) (соответственно (2)) дают линейное представление группы S . Равным образом преобразование координат какого-либо тензора $V_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$

$$\bar{V}_{\beta_1 \dots \beta_k} = A_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots A_{\beta_k}^{\alpha_k} V_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \quad (3)$$

также дает линейное представление группы S .

2°. Чтобы получить линейное представление всей группы G , мы будем рассматривать систему тензоров

$$V, V_{\alpha_1}, V_{\alpha_1 \alpha_2}, \dots, V_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}, \quad (4)$$

которую мы будем называть агрегатом. При этом координаты агрегата мы будем считать произвольными при условии, что они удовлетворяют системе линейных зависимостей

$$V_{\alpha_1 \dots [\alpha_s \alpha_{s+1}] \dots \alpha_k} = V_{\alpha_1 \dots \beta \dots \alpha_k} C_{\alpha_s \alpha_{s+1}}^\beta \quad (k = 2, 3, \dots, m+1). \quad (5)$$

Индексы α_s, α_{s+1} , проальтернированные (без деления) в левой части, заменены в правой части одним индексом β (заметим, что при $k > m$ мы считаем $V_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = 0$). Получаемое при этом пространство переменных координат агрегата мы будем называть коротко пространством (4).

Каждому вектору $a^\alpha \in R$ ставим в соответствие линейное преобразование в пространстве (4):

$$V_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \rightarrow V_{\alpha_1 \dots \alpha_k \alpha_{k+1}} a^{\alpha_{k+1}} \quad (k = 0, 1, \dots, m). \quad (6)$$

Теперь в пространстве (4) строим линейное представление группы G , изображая каждый элемент полупростой компоненты S соответствующим преобразованием (3) в пространстве (4) (для каждого тензора агрегата) и каждый вектор a^α из R — линейным оператором (6) в пространстве (4) (таким образом, в радикале R непосредственные изображения находят лишь бесконечно малые элементы).

Нетрудно показать, что в результате мы получаем линейное представление группы G (по крайней мере локально).

3° Усложним теперь агрегат (4), снабдив его координаты еще одним индексом i :

$$V^i, V_{\alpha_1}^i, V_{\alpha_1 \alpha_2}^i, \dots, V_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^i \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (7)$$

причем при преобразованиях S координаты агрегата испытывают (дополнительно) линейные преобразования по индексу i , отвечающие какому-нибудь определенному линейному представлению полупростой компоненты S (N — число измерений пространства этого представления); на преобразования R индекс i не реагирует. В остальном все повторяется; (5) и (6) нужно переписать, поставив при V индекс i . Очевидно, G имеет вполне определенное линейное представление (по крайней мере локально) в пространстве (7).

Будем называть линейное представление разложимым, если оно приводимо и при этом вполне приводимо. Очевидно, достаточно рассматривать неразложимые представления.

Теорема 1. *Всякое неразложимое унимодулярное линейное представление группы Ли с нильпотентным радикалом эквивалентно ее представлению в пространстве (7) или в инвариантной плоскости этого пространства (последнее означает, что переменные (7) подчинены дополнительно некоторой инвариантной системе линейных зависимостей).*

Доказательство опускаем за недостатком места.

Замечание. Если в теореме 1 снять предположение об унимодулярности (сохранив неразложимость), результат усложняется незначительно. Прежде всего, неунимодулярные представления возможны лишь в случае, когда в R существует вектор p^α , инвариантный при преобразованиях S . Тогда любое неунимодулярное представление может быть получено следующим образом. Векторы a^α гиперплоскости в R , дополнительной к p^α и тоже инвариантной при преобразованиях S , изображаются попрежнему линейными операторами (6)

$$V_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^i \rightarrow V_{\alpha_1 \dots \alpha_k \alpha_{k+1}}^i a^{\alpha_{k+1}} \quad (k = 0, 1, \dots, m),$$

вектор же p^α изображается оператором

$$V_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^i \rightarrow V_{\alpha_1 \dots \alpha_k \alpha_{k+1}}^i p^{\alpha_{k+1}} + \omega V_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^i,$$

ω — произвольная константа. В пространстве (7) возникает неунимодулярное представление, в котором унимодулярные преобразования, ранее отвечавшие p^α , дополнены преобразованием подобия.

4°. Линейному представлению группы G в пространстве (7) можно сопоставить контраградиентное представление. При этом преобразующиеся переменные естественно обозначить

$$W_i, W_i^{\alpha_1}, W_i^{\alpha_1 \alpha_2}, \dots, W_i^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}, \quad (8)$$

поставив условие, чтобы результат свертывания

$$W_i V^i + W_i^{\alpha_1} V_{\alpha_1}^i + W_i^{\alpha_1 \alpha_2} V_{\alpha_1 \alpha_2}^i + \dots + W_i^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} V_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^i \quad (9)$$

оставался инвариантным. Преобразования S действуют на агрегат (8) по очевидному тензорному закону; каждому же вектору $a^\alpha \in R$ мы сопоставляем следующий линейный оператор в пространстве (8):

$$W_i^{\alpha_1 \dots \alpha_s} \rightarrow -W_i^{\alpha_1 \dots \alpha_{s-1}} a^{\alpha_s}. \quad (10)$$

Однако при этом условия (5), наложенные на переменные (7), заставляют нас рассматривать не само пространство агрегатов (8), а его фактор-пространство по подпространству (линейно) порожденному агрегатами (8) следующего частного вида:

$$0, 0, \dots, 0, W_i^{\beta_1 \dots \beta_k}, W_i^{\alpha_1 \dots \alpha_{s+1}}, 0, \dots, 0, \quad (11)$$

где $W_i^{\alpha_1 \dots \alpha_s \alpha_{s+1} \dots \alpha_{k+1}}$ кососимметрично по какой-нибудь паре своих индексов α_s, α_{s+1} , а $W_i^{\beta_1 \dots \beta_k}$ определяется по формуле

$$W_i^{\beta_1 \dots \beta_s \dots \beta_k} = -\frac{1}{2} C_{\alpha_s \alpha_{s+1}}^{\beta_s} W_i^{\beta_1 \dots \beta_{s-1} \alpha_s \alpha_{s+1} \beta_{s+1} \dots \beta_k}. \quad (12)$$

Очевидно, подпространство агрегатов (11) инвариантно относительно тензорных преобразований и преобразований (10), так что эти преобразования можно рассматривать и в фактор-пространстве. При этом мы получаем искомое контраградиентное представление группы G .

Однако в теореме 1 мы рассматривали представление G в пространстве (7), вообще говоря, связывая переменные (7) инвариантной системой линейных зависимостей сверх (5). В соответствии с этим для контраградиентного представления мы должны взять фактор-пространство пространства (8), вообще говоря, по более широкому инвариантному подпространству, чем (11). Отсюда получается

Теорема 2. Всякое неразложимое унимодулярное линейное представление группы Ли с нильпотентным радикалом эквивалентно представлению этой группы в фактор-пространстве пространства (8) по инвариантному подпространству, включающему все агрегаты вида (11).

Изложенные результаты сильно упрощаются в том частном случае, когда радикал R — коммутативный (и, следовательно, $C_{\alpha\beta}^r = 0$). Для этого частного случая наши результаты содержатся по существу в⁽¹⁾, хотя по методу и форме изложения эта работа сильно отличается от нашей.

Поступило
25 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Ф. А. Б резин, ДАН, 93, № 5 (1953).