

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ

РАСЩЕПЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ ИЗ ОДНОГО ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА В ДРУГОЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 V 1954)

Сведение исследования нелинейных интегральных уравнений вида

$$\varphi(s) = \int_G K(s, t) f[t, \varphi(t)] dt$$

(где G — ограниченное замкнутое множество n -мерного пространства) к такой форме, которая позволяет применить вариационные методы (к доказательству теорем существования решений, теорем о точках бифуркации и т. д.), требует ⁽²⁾ представления линейного интегрального оператора

$$A \varphi(s) = \int_G K(s, t) \varphi(t) dt \quad (1)$$

в форме

$$A = HH^*, \quad (2)$$

где H — линейный вполне непрерывный оператор, действующий из пространства L^2 в некоторое банахово пространство E , а H^* — сопряженный H оператор, действующий из E^* в L^2 .

Представление (2) оператора (1) оказывается полезным и в других задачах, не связанных с вариационными методами.

Получение для оператора A представления (2) будем называть расщеплением оператора A .

В случае, когда функция $f(t, u)$ при $|u| \rightarrow \infty$ растет не быстрее степенной, в качестве E и E^* могут фигурировать различные пространства L^p ($p > 1$). Для этого случая теоремы о расщеплении установлены в ⁽²⁾. Если же функция $f(t, u)$ существенно нестепенная (например, экспоненциальная), а ядра $K(s, t)$ неограничены, пространства E и E^* должны быть пространствами Орлича ⁽⁶⁾ (см. также ^(1, 3-5, 7)).

Во всякой заметке предполагается, что ядро $K(s, t)$ симметрично, положительно определено и суммируемо с квадратом.

При выполнении этих условий оператор A , если его рассматривать в пространстве L^2 , положительно определен и вполне непрерывен. Через H будем обозначать оператор $A^{1/2}$, определенный на L^2 . Через $M(u)$ и $N(u)$ ниже обозначаются N' -функции, растущие быстрее u^2 .

1. В ^(3-5, 8) приведены условия непрерывности линейного оператора A , действующего из пространства L_N^* в пространство L_M^* , где $M(u)$ и $N(u)$ — дополнительные друг к другу N' -функции. Пусть какие-либо из этих условий выполняются; тогда найдется такая положительная постоянная k , что

$$\|A\varphi\|_M \leq k \|\varphi\|_N \quad (\varphi \in L_N^*).$$

Излагаемые ниже результаты используют следующую лемму.
Лемма. Пусть $\varphi(s) \in L^2$. Пусть G_n — множество тех $s \in G$, в которых

$$2^{n-1} \leq |H\varphi(s)| < 2^n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Тогда

$$\text{mes } G_n \leq \frac{1}{M[2^{n-1} / \sqrt{K} \|\varphi\|_2]} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Теорема 1. Пусть оператор A действует из L_N^* в L_M^* и непрерывен. Пусть

$$M(u) = [\Phi(u)]^{1+\varepsilon},$$

где $\Phi(u)$ — некоторая N -функция, $\varepsilon > 0$.

Тогда оператор H является непрерывным оператором, действующим из L^2 в пространство L_Φ^* .

Теорема 2. Пусть оператор A действует из L_N^* в L_M^* и непрерывен, причем N' -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию.

Тогда оператор H является непрерывным оператором, действующим из L^2 в пространство L_M^* .

Напомним ⁽⁵⁾, что Δ^2 -условие означает, что при больших u и при некоторых положительных a, b справедливы неравенства

$$M(au) < M^2(u) < M(bu).$$

Теорема 2 применима в наиболее важном случае, когда пространство L_M^* определяется N' -функцией, растущей быстрее любой степенной, так как такие функции, как правило, удовлетворяют Δ^2 -условию. В частности, Δ^2 -условию удовлетворяет функция $e|u| - |u| - 1$. Поэтому из теоремы 2 и из некоторых предложений заметок ⁽³⁻⁵⁾ вытекает:

Теорема 3. Пусть выполнено условие

$$\iint_{GG} e^{K(s,t)} ds dt < \infty.$$

Тогда оператор H действует из L^2 в L_M^* , $M(u) = e^{|u|} - |u| - 1$, и непрерывен.

Интересно, можно ли в теореме 1 положить $\varepsilon = 0$? Нам это неизвестно.

2. Перейдем к условиям компактности оператора H . Доказательства приводимых теорем используют теорему 8 из ⁽⁴⁾, т. е. доказательства теорем заключаются в установлении того факта, что значения оператора в соответствующем пространстве Орлича имеют равномерно абсолютно непрерывные нормы.

Теореме 4. Если в условиях теоремы 1 функция $\Phi(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то оператор H является вполне непрерывным оператором, действующим из L^2 в пространство $L_\Phi^* = L_\Phi$.

Напомним, что N' -функция $\Phi(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, если

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \frac{M(2u)}{M(u)} < \infty.$$

Теорема 5. Пусть A — непрерывный линейный оператор, действующий из пространства L_N^* в пространство L_M^* , где $M(u) = \{\Phi[Q(u)]\}^{1+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$), а $Q(u)$, $\Phi(u)$ — некоторые N' -функции.

Тогда оператор H действует из L^2 в L_Φ^* и вполне непрерывен.

Теорема 6. Пусть A — непрерывный линейный оператор, действующий из пространства L_N^* в пространство L_M^* , где $M(u) = \Phi[Q(u)]$, а $\Phi(u)$ и $Q(u)$ — N' -функции, первая из которых удовлетворяет Δ^2 -условию.

Тогда оператор H действует из L^2 в L_Φ^* и вполне непрерывен.

Нам неизвестно, можно ли положить в теоремах 5 и 6 $Q(u) = au$.

Для приложений наиболее интересна теорема 6. Объединяя ее с условиями непрерывности оператора A , получаем, например, следующее утверждение.

Теорема 7. Пусть N' -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию. Пусть $Q(u)$ — некоторая N' -функция и

$$\iint_{GG} M\{Q[K(s, t)]\} ds dt < \infty.$$

Тогда оператор H действует из L^2 в L_M^* и вполне непрерывен. Например, если

$$\iint_{GG} e^{|K(s, t)|^{2+\varepsilon_0}} ds dt < \infty \quad (\varepsilon_0 > 0),$$

то оператор H действует из L^2 в L_M^* , $M(u) = e^{u^2} - 1$ и вполне непрерывен.

3. Пусть линейный оператор H действует из L^2 в L_M^* и непрерывен. Через H^* обозначим сопряженный H оператор, действующий из L_N^* в L^2 . Если оператор H вполне непрерывен, то и оператор H^* будет линейным вполне непрерывным оператором. Очевидна следующая теорема:

Теорема 8. Если оператор A действует из L_N^* в L_M^* и непрерывен, а оператор H действует из L^2 в L_M^* и непрерывен, то оператор A на замыкании в L_N^* множества $L_N^* \cap L^2$ расщепляем, т. е. представим в виде $A = HH^*$.

Если $N(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то замыкание в L_N^* множества $L_N^* \cap L^2$ совпадает с L_N^* . Так как дополнительная к N' -функции, удовлетворяющей Δ^2 -условию, удовлетворяет Δ_2 -условию, то из теоремы 7 вытекает:

Теорема 9. Пусть N' -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ^2 -условию. Пусть $Q(u)$ — некоторая N' -функция и

$$\iint_{GG} M\{Q[K(s, t)]\} ds dt < \infty.$$

Тогда оператор A действует из L_N^* в L_M^* и допускает представление $A = HH^*$, в котором H — вполне непрерывный линейный оператор, действующий из L^2 в L_M^* .

Приведено одно более конкретное следствие.

Теорема 10. Пусть

$$\iint_{GG} e^{|K(s, t)|^{2+\varepsilon_0}} ds dt < \infty,$$

где ε_0 — некоторое положительное число.

Тогда оператор A действует из L_N^* в L_M^* , где

$$N(u) = (1 + |u|) \ln(1 + |u|) - |u|, \quad M(u) = e^{|u|^2} - |u| - 1.$$

При этом оператор A допускает представление $A = HH^*$, в котором H — линейный вполне непрерывный оператор, действующий из L^2 в L_M^2 .

4. В качестве приложения сформулируем одну нелокальную теорему существования, доказанную с использованием теоремы 10. Мы не видим путей доказательства аналогичных теорем для уравнений с экспоненциальными нелинейностями, не использующих пространства Орлича.

Формулируемая ниже теорема вытекает из того факта, что в пространстве L^2 операторное уравнение $\varphi = B\varphi$ (B — вполне непрерывный оператор) имеет по крайней мере одно решение, если при некотором $\rho > 0$

$$(B\varphi, \varphi) < (\varphi, \varphi) \quad (\varphi \in L^2, \|\varphi\|_2 = \rho).$$

Теорема 11. Пусть симметричное положительно-определенное ядро $K(s, t)$ удовлетворяет условию

$$\iint_{GG} e^{|K(s, t)|^{1+\varepsilon_0}} ds dt < \infty,$$

где ε_0 — некоторое положительное число.

Пусть при $t \in G$, $-\infty < u < \infty$,

$$uf(t, u) \leq u^2 + g(t), \quad |f(t, u)| \leq e^{|u|} + g_1(t),$$

где $k, \alpha > 0$, $g(t)$ — суммируемая функция,

$$\int_G g_1(t) \ln [g_1(t) + 1] dt < \infty.$$

Пусть k больше наибольшего собственного числа ядра $K(s, t)$.

Тогда уравнение

$$\varphi(s) = \int_G K(s, t) f[t, \varphi(t)] dt$$

имеет по крайней мере одно решение.

Решение $\varphi(s)$ в последней теореме обладает тем свойством, что

$$\int_G e^{|\varphi(s)|} ds < \infty.$$

Воронежский государственный университет

Поступило
6 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Банах, Курс функционального анализа, Київ, 1948. ² М. А. Красносельский, ДАН, 82, № 3 (1952); ДАН, 88, № 5 (1953). ³ М. А. Красносельский, Я. Б. Рутцкий, ДАН, 81, № 4 (1951). ⁴ М. А. Красносельский, Я. Б. Рутцкий, ДАН, 85, № 1 (1952). ⁵ М. А. Красносельский, Я. Б. Рутцкий, ДАН, 89, № 4 (1953). ⁶ W. Orlicz, Bul. internat. de l'Acad. Pol., ser. A, Cracovie, 1932. ⁷ Z. W. Birnbaum, W. Orlicz, Stud. Math., 3, 1 (1931). ⁸ А. С. Заanen, Ann. of Math., 47, 654 (1946).