

Н. И. КОВАНЦОВ

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ИНДИКАТРИСА ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КРУЧЕНИЙ ТРИОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НЕГОЛОНОМНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 21 V 1954)

Если s — кривая, расположенная на поверхности, то, отнеся ее к трехграннику $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, где $\mathbf{t}$ — единичный вектор касательной к кривой, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности и $\mathbf{b} = [\mathbf{tn}]$, получают деривационные формулы, аналогичные формулам Серре—Френе⁽¹⁾:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k_n \mathbf{n} - k_g \mathbf{b}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k_n \mathbf{t} + \kappa_g \mathbf{b}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = k_g \mathbf{t} - \kappa_g \mathbf{n}. \quad (1)$$

Здесь ds — дифференциал длины дуги кривой s ; k_n — нормальная кривизна кривой; k_g — ее геодезическая кривизна; κ_g — геодезическое кручение кривой. При этом как нормальная кривизна k_n , так и геодезическое кручение κ_g зависят лишь от направления на поверхности и оказываются одними и теми же для всех кривых, расположенных на поверхности и касающихся друг друга. (В силу этого В. Хлавати называет их, соответственно, первой и второй кривизнами поверхности в данном направлении.) Это обстоятельство делает возможным описывать распределение геодезических кручений в данной точке поверхности при помощи индикатрисы подобно тому, как распределение нормальных кривизн описывается при помощи индикатрисы Дюпена. В настоящей работе мы строим индикатрисы геодезических кручений для неголономных поверхностей, касательные плоскости которых жестко связаны с некоторым подвижным прямоугольным репером. При этом грани последнего оказываются касательными плоскостями некоторой системы неголономных поверхностей, которую мы называем триортогональной системой неголономных поверхностей.

Пусть нам задано трехмерное многообразие ортогональных трехгранников $\mathbf{A}\mathbf{l}_1\mathbf{l}_2\mathbf{l}_3$, где $\mathbf{A}$ — вершина трехгранника, $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$, $\mathbf{l}_3$ — единичные векторы. Тогда инфинитезимальное перемещение трехгранника внутри многообразия может быть определено равенствами:

$$d\mathbf{A} = \omega_i \mathbf{l}_i; \quad d\mathbf{l}_i = \omega_{ik} \mathbf{l}_k \quad (\omega_{ik} = -\omega_{ki}, \quad i, k = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Приняв за базисные формы многообразия формы ω_1 , ω_2 , ω_3 , мы выразим через них все остальные формы, входящие в равенства (2):

$$\omega_{12} = p_i \omega_i, \quad \omega_{23} = q_i \omega_i, \quad \omega_{31} = r_i \omega_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3)$$

1. Выясним геометрический смысл коэффициентов p_i , q_i , r_i . Для этого возьмем кривую, огибаемую вектором $\mathbf{l}_1$ (и определяемую, следовательно, уравнениями $\omega_2 = \omega_3 = 0$), и представим ее себе расположенной на поверхности (в общем случае неголономной), нормальной к вектору $\mathbf{l}_2$. Уравнение такой поверхности имеет вид $\omega_2 = 0$. Тогда для этой кривой мы будем иметь $\mathbf{t} = \mathbf{l}_1$, $\mathbf{n} = \mathbf{l}_2$, $\mathbf{b} = \mathbf{l}_3$, $ds = \omega_1$. Следовательно, формулы (1) для рассматриваемой кривой примут вид:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{l}_1}{\omega_1} = p_1 \mathbf{l}_2 - r_1 \mathbf{l}_3 = p_1 \mathbf{n} - r_1 \mathbf{b}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{d\mathbf{l}_2}{\omega_1} = -p_1 \mathbf{l}_1 + q_1 \mathbf{l}_3 = -p_1 \mathbf{t} + q_1 \mathbf{b},$$

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d\mathbf{l}_3}{\omega_1} = r_1 \mathbf{l}_1 - q_1 \mathbf{l}_2 = r_1 \mathbf{t} - q_1 \mathbf{n}.$$

Обозначая нормальную кривизну, геодезическую кривизну и геодезическое кручение кривой, соответственно, символами k_{n_1} , k_{g_1} , κ_{g_1} , мы из сравнения последних равенств с формулами (1) заключаем, что

$$p_1 = k_{n_1}, \quad q_1 = \kappa_{g_1}, \quad r_1 = k_{g_1}. \quad (4)$$

В этом и состоит геометрический смысл коэффициентов p_1 , q_1 , r_1 .

Аналогично, совершив круговую перестановку индексов 1, 2, 3 и символов p , q , r , мы найдем геометрический смысл остальных коэффициентов:

$$\begin{aligned} q_2 &= k_{n_1}, & r_2 &= \kappa_{g_1}, & p_2 &= k_{g_1}, \\ r_3 &= k_{n_1}, & p_3 &= \kappa_{g_1}, & q_3 &= k_{g_1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь индексы 2 и 3 относятся к кривым, огибаемым, соответственно, векторами I_2 и I_3 , причем каждая из этих кривых считается расположенной на поверхности (неголономной), перпендикулярной к вектору со следующим по порядку индексом.

2. Неголономная поверхность, перпендикулярная к вектору I_1 , определяется уравнением Пфаффа

$$\omega_1 = 0. \quad (6)$$

Эта поверхность становится обыкновенной, если уравнение (6) вполне интегрируемо, а это возможно лишь в случае

$$p_3 + r_2 = 0. \quad (7)$$

Построим на поверхности $\omega_1 = 0$ (в общем случае) индикатрису геодезических кручений, откладывая на касательных к линиям, расположенным на поверхности, квадратный корень из абсолютного значения соответствующего выбранному направлению радиуса геодезического кручения $1/\kappa_g$. Для этого заметим, что если

$$\omega_3 = \alpha \omega_2 \quad (8)$$

(α — некоторый параметр) — уравнение линии, расположенной на поверхности $\omega_1 = 0$, то для этой линии

$$t = \frac{I_2 + \alpha I_3}{\sqrt{1 + \alpha^2}}, \quad n = I_1, \quad b = \frac{-I_3 + \alpha I_2}{\sqrt{1 + \alpha^2}}, \quad ds = \omega_2 \sqrt{1 + \alpha^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{dn}{ds} = \frac{dI_1}{\omega_2 \sqrt{1 + \alpha^2}} = \frac{p_2 + \alpha p_3 - \alpha(r_2 + \alpha r_3)}{1 + \alpha^2} t + \frac{\alpha(p_2 + \alpha p_3) + r_2 + \alpha r_3}{1 + \alpha^2} b.$$

Отсюда заключаем, что геодезическое кручение кривой (8) определится равенством

$$\kappa_g = \frac{\alpha^2 p_3 + \alpha(p_2 + r_3) + r_2}{1 + \alpha^2}. \quad (9)$$

Принимая векторы I_1 , I_2 , I_3 за координатные векторы локальной системы координат x, y, z , мы получим уравнение индикатрисы геодезических кручений поверхности $\omega_1 = 0$:

$$x = 0, \quad r_2 y^2 + (p_2 + r_3) yz + p_3 z^2 = \pm 1. \quad (10)$$

Аналогично получим уравнения индикатрис геодезических кручений для неголономных поверхностей $\omega_2 = 0$ и $\omega_3 = 0$:

$$\begin{aligned} y &= 0, & p_3 z^2 + (q_3 + p_1) zx + q_1 x^2 &= \pm 1, \\ z &= 0, & q_1 x^2 + (r_1 + q_2) xy + r_2 y^2 &= \pm 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Отметим, что поверхности $\omega_2 = 0$ и $\omega_3 = 0$ являются обыкновенными, если, соответственно, выполняются условия полной интегрируемости:

$$\begin{aligned} q_1 + p_3 &= 0, \\ r_2 + q_1 &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Триортогональная система неголономных поверхностей становится обыкновенной триортогональной системой поверхностей, если равен-

ства (7) и (12) имеют место одновременно, а это равносильно равенствам:

$$p_3 = 0, \quad q_1 = 0, \quad r_2 = 0 \quad (13)$$

(ср. (2), стр. 203).

Легко видеть, что в правых частях уравнений кривых (10) и (11) всегда можно выбрать знак таким образом, чтобы эти кривые являлись линиями пересечения координатных плоскостей с поверхностью второго порядка

$$q_1 x^2 + r_2 y^2 + p_3 z^2 + (r_1 + q_2) xy + (p_2 + r_3) yz + (q_3 + p_1) zx = \pm 1. \quad (14)$$

Действительно, если все кривые (10) и (11) — эллипсы, то знаки в правых частях их уравнений, очевидно, совпадают (что легко усмотреть из структуры коэффициентов при квадратах координат), и такой же знак будет в правой части уравнения (14). Если одно из уравнений (10), (11) представляет пару гипербол, то, соглашаясь выбирать определенным образом знак геодезического кручения, мы сможем взять из этих гипербол ту, знак уравнения которой нам окажется нужным. То же самое мы сумеем сделать и в случае, когда из уравнений (10), (11) два или даже все три представляют гиперболы.

Поверхность (14) назовем пространственной индикатрисой геодезических кручений триортогональной системы неголономных поверхностей $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$. Легко показать, что *любой полудиаметр этой поверхности представляет собой квадратный корень из абсолютной величины радиуса геодезического кручения произвольной кривой, касающейся этого полудиаметра и отнесенной к любой поверхности, касательная плоскость которой жестко связана с гранями триортогональной системы $AI_1I_2I_3$.*

Действительно, если воспользоваться формулой Форсайта (3)

$$\frac{d\theta}{ds} + \kappa = \kappa_g,$$

где κ — кручение кривой; κ_g — ее геодезическое кручение относительно некоторой поверхности; θ — угол между нормалью к этой поверхности и главной нормалью кривой, то легко заключить, что кривая имеет одно и то же геодезическое кручение на двух любых поверхностях, образующих между собой постоянный угол. (Это предложение, между прочим, представляет собой обобщение известной теоремы о том, что если две поверхности пересекаются под постоянным углом и на одной из них линия пересечения является линией кривизны, то и на другой эта линия является также линией кривизны — теоремы, которая, в свою очередь, является обобщением теоремы Иохимсталя (4) о плоских сечениях поверхности. Обобщающий характер выказанного предложения станет очевидным, если вспомнить, что геодезическое кручение линии кривизны на поверхности равняется нулю. Отметим еще, что линии, огибаемые векторами I_1, I_2, I_3 , имеют одно и то же геодезическое кручение на каждой соответствующей паре неголономных поверхностей, пересекающихся ортогонально, а потому и под постоянным углом. Для такой системы поверхностей, следовательно, возможно определенное обобщение известной теоремы Дюпона о триортогональных системах обыкновенных поверхностей. Распространением на неголономную геометрию идей классической теории изогональных систем поверхностей занимался Д. М. Синцов (5), который перенес на ортогональные системы, определяемые пфаффовыми уравнениями, теорему Иохимсталя, причем он сужает по сравнению с нашим свое обобщение требованием того, чтобы линия пересечения ортогональных неголономных поверхностей была линией кривизны второго рода, для которой, как известно, геодезическое кручение равно нулю.)

Возьмем теперь некоторую плоскость σ , нормаль которой $\mathbf{p} \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$ (а следовательно, и сама плоскость) жестко связана с трехгранником $\mathbf{A}_1\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3$ ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — константы). Неголономная поверхность Σ , касающаяся плоскости σ , определится дифференциальным уравнением

$$\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \alpha_3\omega_3 = 0. \quad (15)$$

Пусть l — индикатриса геодезических кручений поверхности Σ . Пусть, далее, l' — линия пересечения плоскости σ с поверхностью (14). Так как плоскость σ образует постоянный угол с плоскостью $\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3$ (следовательно, поверхности Σ и $\omega_1 = 0$ изогональны), то это значит, что линия пересечения поверхностей Σ и $\omega_1 = 0$ имеет одно и то же геодезическое кручение на обеих поверхностях. Но в таком случае индикатрисы l и (10) имеют общий диаметр. Аналогично можно показать, что индикатриса l имеет общие диаметры и с индикатрисами (11). Так как, однако, кривая второго порядка, имеющая своими диаметрами три заданных отрезка, может быть только одной, то, следовательно, кривые l и l' совпадают, а это значит, что индикатриса поверхности (15) целиком располагается на поверхности (14). Это и доказывает наше предположение о том, что поверхность (14) является индикатрисой распределения геодезических кручений в совокупности неголономных поверхностей, касательные плоскости жестко связаны с заданным трехгранником $\mathbf{A}_1\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3$. Легко заметить, однако, что векторы $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3$ не занимают никакого особого положения относительно индикатрисы (14). Последняя характеризуется сразу всей жесткой системой направлений, определяемой любыми двумя из них.

Все сказанное применимо, конечно, и к триортогональной системе обыкновенных поверхностей. Пространственная индикатриса в этом случае, в силу (13), имеет уравнение:

$$(r_1 + q_2)xy + (p_2 + r_3)yz + (q_3 + p_1)zx = \pm 1, \quad (16)$$

следовательно, представляет собой всегда гиперболоид. При этом оказывается, что если какая-нибудь поверхность, нормальная к вектору, жестко связанному с трехгранником триортогональной системы, является обыкновенной (не неголономной), то ее нормаль должна принадлежать асимптотическому конусу индикатрисы (16).

В общем случае триортогональной неголономной системы поверхностей, если асимптотический конус индикатрисы (14) содержит три взаимно перпендикулярных образующих, то для того, чтобы поверхность (15) с жестко связанной с трехгранником системы нормалью была обыкновенной, необходимо, чтобы нормаль принадлежала асимптотическому конусу индикатрисы.

3. Если $\kappa_g^1, \kappa_g^2, \kappa_g^3$ — экстремальные значения геодезических кручений, то геодезическое кручение произвольного направления определяется формулой

$$\kappa_g = \alpha_1^2 \kappa_g^1 + \alpha_2^2 \kappa_g^2 + \alpha_3^2 \kappa_g^3, \quad (17)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — соответствующие направляющие косинусы указанного направления по отношению к векторам $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3$. Эта формула представляет собой, очевидно, обобщение на пространство известной в теории поверхностей формулы Эйлера для нормальных кривизн поверхности (только роль нормальной, или первой, по терминологии Хлавати, кривизны поверхности играет у нас геодезическое кручение или вторая кривизна поверхности).

Поступило
25 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ V. Hlavatý, Differentialgeometrie der Kurven und Flächen und Tensorrechnung, Gronningen — Batavia, 1939. ² С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, М.—Л., 1948. ³ A. R. Forsyth, Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces, Cambridge, 1920. ⁴ F. Joachimstahl, J. f. reine u. angew. Math., 30, (1846). ⁵ Д. М. Синцов, Отчет о деятельности матем. конф. научн.-педагог. общ. ДВ гос. унив., 1929, стр. 21—24.