

М. А. ДЖАВАДОВ

ПРОЕКТИВНЫЕ И НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ НАД МАТРИЦАМИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 1 VI 1954)

Хуа Ло-Кен ⁽¹⁾ рассматривал одномерное проективное пространство, роль координат в котором играют вещественные матрицы любого порядка, или, как мы будем говорить, одномерное проективное пространство над вещественными матрицами, и некоторую геометрию в этом пространстве, которую можно называть неевклидовой геометрией в одномерном проективном пространстве над вещественными матрицами. Б. А. Розенфельд определил проективное пространство любого числа измерений над вещественными матрицами ⁽²⁾ и один вид неевклидова пространства любого числа измерений над вещественными матрицами второго порядка ⁽³⁾. В настоящей работе доказываются основные теоремы проективной геометрии над вещественными, комплексными и двойными матрицами любого порядка и определяются все неевклидовы пространства любого числа измерений над этими матрицами.

Проективные пространства над комплексными и двойными матрицами определяются совершенно так же, как пространство над вещественными матрицами ⁽²⁾, с той разницей, что в этом определении вещественные числа заменены соответственно комплексными числами $a + bi$, $i^2 = -1$, или двойными числами $a + be$, $e^2 = +1$.

Будем называть коллинеациями проективных пространств над матрицами, так же как в случае обычных пространств, взаимно-однозначные непрерывные преобразования этого пространства, переводящие прямые в прямые, а корреляциями — взаимно-однозначные и непрерывные преобразования, переводящие точки в гиперплоскости, при которых точки, лежащие на одной прямой, переходят в гиперплоскости, принадлежащие к одному пучку.

Теорема 1. *Всякая коллинеация n -мерного проективного пространства над вещественными матрицами в координатах имеет вид*

$$y^i l = \sum_j a^i_j x^j, \quad (1)$$

где l — произвольная неособенная матрица; всякая коллинеация n -мерного проективного пространства над комплексными и двойными матрицами в координатах имеет вид (1) или

$$y^i l = \sum_j a^i_j \bar{x}^j, \quad (2)$$

где $\bar{x}$ — комплексная или двойная матрица, полученная из матрицы x переходом от всех ее элементов к сопряженным числам (комплексным и двойным числом, сопряженным с числом $z = a + bi$ или $a + be$, называется число $\bar{z} = a - bi$ или $a - be$).

Теорема 2. *Всякая корреляция n -мерного проективного пространства над вещественными матрицами в координатах имеет вид*

$$lu_i = \sum_j \tilde{x}^j a_{ij}, \quad (3)$$

где l — произвольная неособенная матрица, а $\tilde{x}$ — матрица, полученная транспонированием матрицы x ; всякая корреляция n -мерного проективного пространства над комплексными и двойными матрицами в координатах имеет вид (3) или

$$lu_i = \sum_j \tilde{\bar{x}}^j a_{ij}. \quad (4)$$

Коллинеации и корреляции (1) и (3) проективных пространств над комплексными или двойными матрицами называются коллинеациями и корреляциями первого рода, а коллинеации и корреляции (2) и (4) тех же пространств — коллинеациями и корреляциями второго рода.

Если мы определим двойное отношение четырех точек на прямой проективного пространства с координатами $x^i, y^i, x^i + y^i a$ и $x^i + y^i b$ как матрицу $W = ba^{-1}$, то при коллинеациях проективного пространства над вещественными матрицами и при коллинеациях первого рода проективного пространства над комплексными и двойными матрицами двойное отношение W четырех точек на прямой переходит в матрицу kWk^{-1} , где k — некоторая неособенная матрица. При коллинеациях второго рода двойное отношение W переходит в матрицу $k\bar{W}k^{-1}$.

Будем называть линейной конгруэнцией прямых $(2n+1)$ -мерного проективного пространства над вещественными матрицами множество инвариантных прямых коллинеации

$$'X^{2i} = X^{2i+1}, \quad 'X^{2i+1} = X^{2i}. \quad (5)$$

Теорема 3. *Прямые линейной конгруэнции $(2n+1)$ -мерного проективного пространства над вещественными матрицами t -го порядка находятся во взаимно-однозначном и взаимно-непрерывном соответствии с точками n -мерного проективного пространства над двойными матрицами t -го порядка, а группа коллинеаций последнего пространства изоморфна фактор-группе группы коллинеаций первого пространства, переводящих в себя линейную конгруэнцию, по подгруппе коллинеаций, переводящих в себя каждую прямую этой конгруэнции.*

Соответствие прямых пространства над вещественными матрицами и точек пространства над двойными матрицами устанавливается таким образом, что прямой, проходящей через точку с координатами X^i , соответствует точка с координатами $x^i = X^{2i} + eX^{2i+1}$.

Будем называть линейной конгруэнцией прямых $(2n+1)$ -мерного пространства над двойными матрицами множество инвариантных прямых коллинеации

$$'X^{2i} = \bar{X}^{2i+1}, \quad 'X^{2i+1} = \bar{X}^{2i}. \quad (6)$$

Теорема 4. *Прямые линейной конгруэнции $(2n+1)$ -мерного проективного пространства над двойными матрицами t -го порядка находятся во взаимно-однозначном и взаимно-непрерывном соответствии с точками n -мерного проективного пространства над вещественными матрицами $2t$ -го порядка, а группа коллинеаций последнего пространства изоморфна фактор-группе группы кол-*

линеаций первого пространства, переводящих в себя линейную конгруэнцию, по подгруппе коллинеаций, переводящих в себя каждую прямую этой конгруэнции.

Если представлять вещественные матрицы 2-го порядка псевдокватернионами, т. е. выражениями вида $\alpha = a + bi + ce + df$, $i^2 = -1$, $e^2 = +1$, $ie = -ei = f$, причем псевдокватернион $a + bi + ce + df$ представляет матрицу

$$\begin{pmatrix} a + d & b + c \\ -b + c & a - d \end{pmatrix},$$

и рассматривать вещественные матрицы $2m$ -го порядка как псевдокватернионные матрицы m -го порядка, то соответствие прямых пространства над двойными матрицами и точек пространства над вещественными матрицами устанавливается таким образом, что прямой, проходящей через точку с координатами X^I , соответствует точка с псевдокватернионными координатами $x^i = X^{2i} + fX^{2i+1}$, причем двойная единица e , входящая в состав координат X^I , отождествляется с псевдокватернионной единицей e .

Если в теореме 3 заменить коллинеацию (5) коллинеацией

$$'X^{2i} = X^{2i+1}, \quad 'X^{2i+1} = -X^{2i}, \quad (7)$$

мы получим аналогичную теорему об n -мерном проективном пространстве над комплексными матрицами m -го порядка, а если в теореме 4 заменить двойные матрицы комплексными, мы получим аналогичную теорему об n -мерном проективном пространстве над кватернионными матрицами m -го порядка. Частным случаем указанных теорем 3 и 4 и их аналогов при $m = 1$, $n = 1$ являются теорема о вещественной модели комплексного проективного пространства в биаксиальном пространстве, доказанная А. П. Норденом (4), и теоремы о моделях кватернионного и псевдокватернионного проективных пространств, соответственно, в комплексном и двойном пространстве, доказанные Б. А. Розенфельдом (3).

Применяя тот же процесс к проективным пространствам над кватернионами и псевдокватернионами, мы получим аналогичные теоремы о проективных пространствах над альтернионами (числами Клиффорда) и псевдоальтернионами — многомерными обобщениями кватернионов и псевдокватернионов. Одномерные альтернионные и псевдоальтернионные пространства рассматривались нами (5) в применении к геометрии конформных преобразований вещественных евклидовых и псевдоевклидовых пространств и к теории спинорных представлений движений неевклидовых пространств.

Полученные результаты могут быть применены к геометрии плоскостей вещественных, комплексных и двойных проективных и неевклидовых пространств, так как n -мерное проективное пространство над вещественными, комплексными или двойными матрицами m -го порядка находится во взаимно-однозначном и взаимно-непрерывном соответствии с $(m - 1)$ -мерными плоскостями $(mn + m - 1)$ -мерного, соответственно, вещественного, комплексного или двойного пространства, а группы коллинеаций и корреляций соответственных пространств изоморфны между собой.

По аналогии с классическими неевклидовыми пространствами будем называть n -мерным неевклидовым пространством над вещественными, комплексными или двойными матрицами m -го порядка проективное пространство над теми же матрицами, в котором определена инволюционная корреляция, которую мы будем называть абсолютным поляритетом, а точки

и гиперплоскости, соответствующие друг другу в этой корреляции, будем называть, соответственно, полюсом и полярой. Будем называть метрическими инвариантами двух точек неевклидова пространства над матрицами собственные числа и степени элементарных делителей матрицы двойного отношения этих двух точек и двух точек пересечения определяемой ими прямой с гиперплоскостями, полярными этим точкам.

Если абсолютный поляритет неевклидова пространства над матрицами имеет вид

$$u_i = \sum_j \tilde{x}^j a_{ij}, \quad (8)$$

матрица двойного отношения, определяющая метрические инварианты двух точек неевклидова пространства над матрицами, имеет вид

$$\left(\sum_i \sum_j \tilde{y}^j a_{ij} y^i \right)^{-1} \left(\sum_i \sum_j \tilde{y}^j a_{ij} x^i \right) \left(\sum_i \sum_j \tilde{x}^j a_{ij} x^i \right)^{-1} \left(\sum_i \sum_j \tilde{x}^j a_{ij} y^i \right), \quad (9)$$

а если абсолютный поляритет неевклидова пространства имеет вид

$$u_i = \sum_j \tilde{\tilde{x}}^j a_{ij}, \quad (10)$$

матрица, определяющая метрические инварианты двух точек, отличается от матрицы (9) заменой всех знаков $\sim$ на $\tilde{\sim}$.

Для определения всех неевклидовых пространств над матрицами достаточно определить все инволюционные корреляции проективных пространств над матрицами, что нетрудно сделать в силу изоморфизма групп коллинеаций и корреляций этих пространств и групп коллинеаций и корреляций $(mn + m - 1)$ -мерных вещественных, комплексных или двойных пространств.

Будем называть движениями неевклидова пространства над матрицами взаимно-однозначные преобразования этого пространства, сохраняющие метрические инварианты точек. Нетрудно показать, что движения неевклидова пространства над матрицами являются коллинеациями этого пространства, перестановочными с абсолютным поляритетом.

Поступило
26 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Хуа Ло-Кен, ДАН, 53, 99 (1946). ² Б. А. Розенфельд, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 9, 213 (1952). ³ Б. А. Розенфельд, Сборн. 125 лет неевклидовой геометрии Лобачевского, М.—Л., 1951, стр. 151—166. ⁴ А. П. Норден, Матем. сборн., 24 (66): 3, 429 (1949). ⁵ М. А. Джавадов, ДАН, 86, № 4, 653 (1952).