

И. Н. ГРИГОРЬЕВ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ p -ОРТОГОНАЛЬНО-СОПРЯЖЕННЫХ СИСТЕМ В n -МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 19 V 1954)

1. Как известно ⁽¹⁾, триортогональная система с одним семейством поверхностей постоянной отрицательной кривизны, допускающая двухпараметрическое семейство преобразований, обладает следующими свойствами:

1) луч конгруенции касается соответствующих поверхностей (псевдосферических);

2) асимптотические линии на фокальных поверхностях соответствуют;

3) линии пересечения поверхностей данной системы переходят в линии пересечения поверхностей преобразованной системы (линии кривизны).

С другой стороны, существует более широкий класс конгруенций W , переводящий линии кривизны данной поверхности в линии кривизны преобразованной поверхности ⁽²⁾.

Естественно поставить вопрос о существовании более широкого класса триортогональных систем, допускающего по крайней мере однопараметрическое семейство асимптотических преобразований, обладающих свойствами 1), 2) и 3).

Если точка A описывает семейства поверхностей, а единичные векторы e_1, e_2, e_3 касательны к линиям их пересечения, то триортогональная система определяется уравнениями

$$\begin{aligned} dA &= \sum_{k=1}^3 \omega^k e_k; \\ de_i &= \sum_{j=1}^3 \omega_i^j e_j; \\ \omega_j^i &= l_{jj}^i \omega^j - l_{ii}^j \omega^i, \quad i \neq j = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{1}$$

где A — радиус-вектор точки A ; l_{jj}^i и l_{ii}^j — главные кривизны поверхностей в точке A . Радиус-вектор A_1 , соответствующий точке A_1 преобразованной системы, связан соотношением

$$A_1 = A + \rho (\cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2), \tag{2}$$

где ρ — фокальное расстояние, φ — угол между лучом конгруенции и вектором e_1 .

Уравнения асимптотического преобразования произвольной триортогональной системы в триортогональную систему имеют вид

ПОПРАВКА

На стр. 765 строки 24—26 следует читать:

Если точка A описывает семейства поверхностей, а единичные векторы e_1, e_2, e_3 касательны к линиям их пересечения, то триортогональная система определяется уравнениями:

$$d\varphi = \left(-l_{11}^2 + \frac{\sin \varphi}{\rho} - tl_{11}^3 \cos \varphi \right) \omega^1 + \left(l_{22}^1 - \frac{\cos \varphi}{\rho} - tl_{22}^3 \sin \varphi \right) \omega^2 + \\ + \frac{1}{t} \left(\frac{1}{\rho} - l_{33}^1 \cos \varphi - l_{33}^2 \sin \varphi \right) \omega^3; \\ d\rho = \rho_1 \omega^1 + \rho_2 \omega^2; \\ dt = t_1 \omega^1 + t_2 \omega^2 + t_3 \omega^3;$$

$$\rho_1 \rho_2 + \rho_1 \sin \varphi + \rho_2 \cos \varphi + \sin \varphi \cos \varphi [1 + \rho^2 (1 + t^2) l_{11}^3 l_{22}^3] = 0,$$

где $t \neq 0$ — котангенс угла между фокальными плоскостями преобразующей конгруенции.

Существование по крайней мере однопараметрического семейства преобразований сводится к требованию полной интегрируемости первого уравнения системы (3).

Это требование приводит к соотношениям

$$\rho_1 = \rho_2 = t_1 = t_2 = 0. \quad (4)$$

Отсюда

$$\rho = \text{const}, \quad (5)$$

и для поверхностей $\omega^3 = 0$

$$t = \text{const}; \quad l_{11}^3 l_{22}^3 = \text{const}. \quad (6)$$

Следовательно, кривизна поверхности $\omega^3 = 0$ постоянна.

В силу соотношений (5) и (6) преобразующая конгруенция оказывается псевдосферической, а преобразуемая триортогональная система — системой с одним семейством псевдосферических поверхностей.

При $t = 0$ отдельным рассмотрением можно показать, что асимптотическое преобразование посредством нормальной конгруенции допускают только триортогональные системы Вейнгартена (1).

Итак, доказана теорема:

Теорема. Только псевдосферические триортогональные системы допускают асимптотическое преобразование.

2. Эти построения переносятся на n -мерное пространство. p -Ортогональной системой в n -мерном пространстве ($p \leq n$) называется p -мерная поверхность, состоящая из p однопараметрических семейств $(p-1)$ -мерных поверхностей, пересекающихся по взаимно-ортогональным линиям.

В трехмерном пространстве требования ортогональности линий пересечения поверхностей достаточно, чтобы эти линии были взаимно сопряжены (теорема Дюпена). Это же имеет место в n -мерном пространстве при $p = n$ (3).

При $p < n$ существуют p -ортогональные системы, не являющиеся в то же время сопряженными. Например, триортогональная система в n -мерном пространстве ($3 < n$) существует с произволом $n-3$ функций трех переменных, в то время как трижды ортогонально-сопряженная система существует с произволом трех функций двух переменных.

Выбрав первые p векторов $(e_1, \dots, e_p)$ и $(E_1, \dots, E_p)$ ортогональных реперов в точках A и A_1 , соответственно, данной и преобразованной систем касательными к линиям пересечения $(p-1)$ -мерных поверхностей, задачу можно сформулировать следующим образом:

Преобразовать p -ортогонально-сопряженную систему в n -мерном пространстве в p -ортогонально-сопряженную систему так, чтобы:

а) каждая двумерная поверхность семейства с касательными плоскостями $(e_1 e_2)$ была преобразована в соответствующую двумерную

поверхность семейства с касательными плоскостями $(E_1 E_2)$ конгруенцией W ;

б) линии пересечения $(p - 1)$ -мерных поверхностей на данной и преобразованной системах соответствовали;

в) данная система допускала по крайней мере однопараметрическое семейство таких преобразований.

Преобразования p -ортогонально-сопряженных систем, удовлетворяющие условиям а), б) и в), будем называть асимптотическими.

Доказана следующая теорема:

Теорема. p -Ортогонально-сопряженная система в n -мерном пространстве, допускающая асимптотическое преобразование, состоит из $(p - 3)$ -параметрического семейства конгруентных псевдосферических триортогональных систем, каждая из которых лежит в одном евклидовом трехмерном пространстве. Каждый такой триортогональный элемент преобразуется посредством псевдосферических конгруенций в триортогональный элемент такого же типа, лежащий в том же трехмерном пространстве.

Если рассматривать p -ортогонально-сопряженную систему, допускающую асимптотическое преобразование, в целом как p -мерное тождественное многообразие $\mathcal{M}_p$, то она обладает трехмерными плоскими образующими E_3 . Назовем шестимерными разветвляющимися поверхностями R_6 геометрическое место трехмерных касательных к некоторому трехмерному многообразию $\mathcal{M}_3$ в n -мерном пространстве. Наше p -мерное многообразие $\mathcal{M}_p$ с трехмерными плоскими образующими E_3 можно разложить $\binom{p-6}{3}$ способами на разветвляющиеся поверхности R_6 подобно тому, как прямолинейные конгруенции трехмерного пространства разлагаются двумя способами на разветвляющиеся поверхности.

В заключение приношу глубокую благодарность проф. С. П. Финикову, под руководством которого выполнена эта работа.

Поступило
20 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, Bologna, 2, p. II, 1927.
² С. П. Фиников, *Теория конгруенций*, М., 1950. ³ И. А. Схоутен, Д. Дж. Стройк, *Введение в новые методы дифференциальной геометрии*, 3, М., 1948.