

М. С. БРОДСКИЙ

ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 21 V 1954)

Удобным орудием для изучения спектральных свойств линейных несамосопряженных операторов является понятие характеристической матрицы-функции ⁽¹⁾. Использование этого понятия основано, главным образом, на следующей «теореме умножения».

Пусть в гильбертовом пространстве $H = H_1 \oplus H_2$ действует линейный ограниченный оператор A , для которого подпространство H_1 инвариантно. Определим в H_k ($k = 1, 2$) операторы A_k , полагая $A_k f = P_k A f$ ($f \in H_k$), где P_k — оператор проектирования на H_k , и условимся называть оператор A сцеплением операторов A_1 и A_2 .

Теорема умножения заключается в том, что при некоторых ограничениях, накладываемых на размерности подпространств $\frac{A - A^*}{i} H$ и $\frac{A_k - A_k^*}{i} H_k$ ($k = 1, 2$), а также на их взаимное расположение ^(1, 2), характеристическая матрица-функция оператора A равна произведению характеристических матриц-функций сцепляемых операторов.

В настоящей статье понятие характеристической матрицы-функции несколько обобщается. При этом все основные свойства характеристической матрицы-функции, перечисленные в ⁽¹⁾, сохраняются, и теорема умножения становится справедливой без указанных выше ограничений. Кроме того, в отличие от характеристических матриц-функций, введенных в ⁽¹⁾, обобщенные матрицы-функции можно строить и для самосопряженных операторов.

1. Пусть в гильбертовом пространстве H действует линейный ограниченный оператор A , для которого подпространство $\frac{A - A^*}{i} H$ конечномерно. Зададим в H некоторое конечномерное подпространство $E \subseteq \frac{A - A^*}{i} H$ и обозначим ортонормированный базис собственных векторов оператора $\frac{A - A^*}{i}$ в подпространстве E через $e_1, e_2, \dots, e_r$. Соответствующие векторам $e_1, e_2, \dots, e_r$ собственные значения обозначим через $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$. Пусть m, s и n — число положительных, нулевых и отрицательных среди чисел ω_α , а p и q — некоторые целые числа, удовлетворяющие условиям $p \geq m + s, q \geq n + s$.

Матрицу-функцию

$$W(\lambda) = I - i\P^* \| (A - \lambda E)^{-1} e_\alpha, e_\beta \| \Pi y,$$

где $y = \begin{pmatrix} I_p & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -I_q \end{pmatrix}$, а Π — произвольная постоянная прямоугольная матрица, содержащая r линейно независимых строк и $p + q$ столб-

цов и удовлетворяющая условию

$$\Pi \Pi^* = \Omega, \quad \Omega = \begin{vmatrix} \omega_1 & & \\ & \omega_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \omega_r \end{vmatrix},$$

будем называть характеристической для оператора A .

В силу произвола в выборе подпространства E , а также чисел p и q характеристическая матрица-функция определяется по оператору неоднозначно.

Приведем пример. Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор с простым спектром, e — воспроизводящий элемент. Если $E = e$, $p = q = 1$, то можно положить $\Pi = \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix}$, и тогда

$$W(\lambda) = e^{ih(\lambda)\varepsilon} = I + ih(\lambda)\varepsilon,$$

где $h(\lambda) = ((A - \lambda E)^{-1}e, e)$, $\varepsilon = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Рассмотрим произвольное подпространство H_0 пространства H и зададим в H_0 оператор A_0 , полагая

$$A_0 f = P_0 A f \quad (f \in H_0),$$

где P_0 — оператор проектирования на H_0 . Пусть $E_0 = P_0 E$. Тогда

$$\frac{A_0 - A_0^*}{i} H_0 = P_0 \frac{A - A^*}{i} H_0 \subseteq P_0 \frac{A - A^*}{i} H \subseteq E_0.$$

Обозначим через $e_1^{(0)}, e_2^{(0)}, \dots, e_{r_0}^{(0)}$ ортонормированный базис собственных векторов операторов $\frac{A_0 - A_0^*}{i}$ в подпространстве E_0 и введем матрицы

$$U_0 = \|(e_\alpha^{(0)}, e_\beta)\|, \quad \Pi_0 = U_0 \Pi.$$

Тогда матрица-функция

$$W_0(\lambda) = I - i\Pi_0^* \|(A_0 - \lambda E)^{-1} e_\alpha^{(0)}, e_\beta^{(0)}\| \Pi_0 y \quad (1)$$

является характеристической для оператора A_0 .

Действительно, строки матрицы Π_0 линейно независимы, так как линейно независимы строки матриц U_0 и Π . Кроме того

$$\begin{aligned} \Pi_0 y \Pi_0^* &= U_0 \Pi \Pi^* U_0^* = U_0 \Omega U_0^* = \|(e_\alpha^{(0)}, e_\beta)\| \left\| \left(\frac{A - A^*}{i} e_\sigma, e_\tau \right) \right\| \|(e_\gamma^{(0)}, e_\delta)\|^* = \\ &= \left\| \left(\frac{A - A^*}{i} e_\alpha^{(0)}, e_\beta^{(0)} \right) \right\| = \left\| \left(\frac{A_0 - A_0^*}{i} e_\alpha^{(0)}, e_\beta^{(0)} \right) \right\|. \end{aligned}$$

Обозначая

$$\Omega_0 = \begin{vmatrix} \omega_1^{(0)} & & \\ & \omega_2^{(0)} & \\ & & \ddots \\ & & & \omega_{r_0}^{(0)} \end{vmatrix},$$

где $\omega_\alpha^{(0)}$ — собственные значения, соответствующие векторам $e_\alpha^{(0)}$, получим

$$\Pi_0 y \Pi_0^* = \Omega_0. \quad (2)$$

Наконец, если m_0, s_0 и n_0 — число положительных, нулевых и отрицательных среди чисел $\omega_\alpha^{(0)}$, то, в силу (2) и линейной независимости строк матрицы Π_0 ,

$$p \geq m_0 + s_0, \quad q \geq n_0 + s_0.$$

Условимся матрицу-функцию (1) называть проекцией матрицы-функции $W(\lambda)$ на подпространство H_0 .

3. Теорема 1. Если H_1 — инвариантное подпространство оператора A и $H_2 = H \ominus H_1$, то

$$W(\lambda) = W_2(\lambda) W_1(\lambda),$$

где $W_k(\lambda)$ ($k = 1, 2$) — проекция матрицы-функции $W(\lambda)$ на подпространство H_k .

Доказательство. Пусть P_k — оператор проектирования на H_k . Строя проекцию матрицы-функции $W(\lambda)$ на подпространство H_k , мы последовательно определим, как это было выше показано, оператор A_k , действующий в H_k , подпространство $E_k = P_k E$, ортонормированный базис собственных векторов $e_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, r_k$) оператора $\frac{A_k - A_k^*}{i}$ в E_k и, наконец, матрицы

$$U_k = \|(e_\alpha^{(k)}, e_\beta)\|, \quad \Pi_k = U_k \Pi, \quad \Omega_k = \begin{vmatrix} \omega_1^{(k)} & & \\ & \omega_2^{(k)} & \\ & & \ddots \\ & & & \omega_{r_k}^{(k)} \end{vmatrix},$$

где $\omega_\alpha^{(k)}$ — собственные значения, соответствующие векторам $e_\alpha^{(k)}$.

Рассмотрим оператор $\Gamma = P_1 A P_2$. Так как $P_1 A^* P_2 = 0$, то

$$\frac{\Gamma}{i} = P_1 \frac{A - A^*}{i} P_2,$$

откуда следует, что Γ аннулирует каждый вектор, ортогональный к E_2 , а E_2 отображает в E_1 . Полагая

$$\gamma = \left\| \left(\frac{\Gamma}{i} e_\alpha^{(2)}, e_\beta^{(1)} \right) \right\|,$$

получим

$$\begin{aligned} \gamma &= \left\| \left(\frac{A - A^*}{i} e_\alpha^{(2)}, e_\beta^{(1)} \right) \right\| = \|(e_\alpha^{(2)}, e_\beta)\| \left\| \left(\frac{A - A^*}{i} e_\sigma, e_\tau \right) \right\| \|(e_\gamma^{(1)}, e_\delta)\|^* = \\ &= U_2 \Omega U_1^* = \Pi_2 \gamma \Pi_1^*. \end{aligned}$$

Обозначим

$$R = R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1}, \quad R_k = R_{k\lambda} = (A_k - \lambda E)^{-1}.$$

Резольвенты R, R_1 и R_2 связаны соотношением

$$R = R_1 P_1 + R_2 P_2 - R_1 \Gamma R_2 P_2. \quad (3)$$

Действительно, так как

$$A - \lambda E = (A_1 - \lambda E) P_1 + (A_2 - \lambda E) P_2 + \Gamma,$$

то

$$\begin{aligned} R - (R_1 P_1 + R_2 P_2) &= (R_1 P_1 + R_2 P_2) [(A_1 - \lambda E) P_1 + (A_2 - \lambda E) P_2 - (A - \lambda E)] R = \\ &= -(R_1 P_1 + R_2 P_2) \Gamma R = -R_1 \Gamma R = -R_1 \Gamma (R_1 P_1 + R_2 P_2 - R_1 \Gamma R) = -R_1 \Gamma R_2 P_2. \end{aligned}$$

Из (3) находим

$$\|(Re_\alpha, e_\beta)\| = \|(R_1 P_1 e_\alpha, P_1 e_\beta)\| + \|(R_2 P_2 e_\alpha, P_2 e_\beta)\| - \|(R_1 \Gamma R_2 P_2 e_\alpha, P_1 e_\beta)\|.$$

Так как

$$P_k e_\alpha = \sum_{\beta=1}^{r_k} (e_\alpha, e_\beta^{(k)}) e_\beta^{(k)} = \sum_{\beta=1}^{r_k} (U_k^*)_{\alpha\beta} e_\beta^{(k)},$$

то

$$\|(Re_\alpha, e_\beta)\| = U_1^* \|(R_1 e_\alpha^{(1)}, e_\beta^{(1)})\| U_1 + U_2^* \|(R_2 e_\alpha^{(2)}, e_\beta^{(2)})\| U_2 - U_2^* \|(R_1 \Gamma R_2 e_\alpha^{(2)}, e_\beta^{(1)})\| U_1$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \Pi^* \|(Re_\alpha, e_\beta)\| \Pi &= \Pi_1^* \|(R_1 e_\alpha^{(1)}, e_\beta^{(1)})\| \Pi_1 + \Pi_2^* \|(R_2 e_\alpha^{(2)}, e_\beta^{(2)})\| \Pi_2 - \\ &- \Pi_2^* \|(R_1 \Gamma R_2 e_\alpha^{(2)}, e_\beta^{(1)})\| \Pi_1. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} \|(R_1 \Gamma R_2 e_\alpha^{(2)}, e_\beta^{(1)})\| &= \|(R_2 e_\alpha^{(2)}, e_\beta^{(2)})\| \|(\Gamma e_\sigma^{(2)}, e_\tau^{(1)})\| \|(R_1 e_\gamma^{(1)}, e_\delta^{(1)})\| = \\ &= \|(R_2 e_\alpha^{(2)}, e_\beta^{(2)})\| i_\gamma \|(R_1 e_\gamma^{(1)}, e_\delta^{(1)})\| = i \|(R_2 e_\alpha^{(2)}, e_\beta^{(2)})\| \Pi_2 y \Pi_1^* \|(R_1 e_\gamma^{(1)}, e_\delta^{(1)})\|. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= I - i \Pi^* \|(Re_\alpha, e_\beta)\| \Pi y = I - i \Pi_1^* \|(R_1 e_\alpha^{(1)}, e_\beta^{(1)})\| \Pi_1 y - i \Pi_2^* \|(R_2 e_\alpha^{(2)}, e_\beta^{(2)})\| \Pi_2 y + \\ &+ [i \Pi_2^* \|(R_2 e_\alpha^{(2)}, e_\beta^{(2)})\| \Pi_2 y] [i \Pi_1^* \|(R_1 e_\alpha^{(1)}, e_\beta^{(1)})\| \Pi_1 y], \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= [I - i \Pi_2^* \|(R_2 e_\alpha^{(2)}, e_\beta^{(2)})\| \Pi_2 y] [I - i \Pi_1^* \|(R_1 e_\alpha^{(1)}, e_\beta^{(1)})\| \Pi_1 y] = \\ &= W_2(\lambda) W_1(\lambda). \end{aligned}$$

4. Приведем еще без доказательства следующее предложение.

Теорема 2. Пусть в гильбертовых пространствах H_1 и H_2 действуют линейные ограниченные операторы A_1 и A_2 и пусть

$$W_k = I - i \Pi_k^* \|(A_k - \lambda E)^{-1} e_\alpha^{(k)}, e_\beta^{(k)}\| \Pi_k y_k \quad (k = 1, 2)$$

характеристическая матрица-функция оператора A_k . Если $y_1 = y_2$, то существует такое сцепление A операторов A_1 и A_2 , что матрица-функция $W(\lambda) = W_2(\lambda) W_1(\lambda)$ является для A характеристикой. При этом $W_k(\lambda)$ ($k = 1, 2$) — проекции матрицы-функции $W(\lambda)$ на подпространства H_k .

Теоремы 1 и 2 легко обобщаются на тот случай, когда пространство H является прямой ортогональной суммой любого конечного или счетного числа подпространств:

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \dots$$

и каждое из подпространств $H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_n$ ($n = 1, 2, \dots$) инвариантно относительно оператора A .

Одесский государственный
педагогический институт
им. К. Д. Ушинского

Поступило
27 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. С. Лившиц, Матем. сбор., 34 (76):1 (1954). ² М. С. Лившиц, В. П. Потапов, ДАН, 72, № 4 (1950).