

Академик П. АЛЕКСАНДРОВ

О ГОМЕОМОРФИЗМЕ ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

1. Постановка вопроса. Рассматриваются множества, лежащие в n -мерном евклидовом пространстве R^n . Сначала предположим, что данное множество есть полиэдр размерности > 0 . Рассмотрим какую-нибудь триангуляцию τ полиэдра A и множество всех подразделений $\alpha, \beta, \dots$ этой триангуляции; это множество оказывается направленным: триангуляция β следует за триангуляцией α , если β есть подразделение триангуляции α . В этом случае определена проекция π_α^β , ставящая в соответствие каждому симплексу $t_\beta \in \beta$ носитель этого симплекса в комплексе α . Направленное множество всех подразделений триангуляции τ вместе с проекциями π_α^β естественно назвать комбинаторным спектром Σ_τ полиэдра A , соответствующим данной триангуляции τ этого полиэдра. Естественно спросить, каким условиям должны удовлетворять комбинаторные спектры Σ_τ и $\Sigma_{\tau'}$ двух полиэдров $A = \tilde{\tau}$ и $A' = \tilde{\tau'}$ для того, чтобы эти полиэдры были гомеоморфны между собою. Простой ответ на этот вопрос следовал бы из так называемой основной гипотезы комбинаторной топологии; но мы далеки от ее доказательства. В этой заметке некоторый — хотя и сложный — ответ на поставленный вопрос будет получен в качестве частного случая гораздо более общей теоремы.

Эта последняя касается любых множеств, лежащих в R^n , и в этом случае естественно рассматривать любые триангуляции, покрывающие данное множество A (в том само собою разумеющемся смысле, что A содержится в теле рассматриваемой триангуляции)*. Вспомним, что триангуляции, покрывающие, например, замкнутое множество, составляли постоянный инструмент исследования с самого возникновения теоретико-множественных методов в математике (в теории функций комплексного переменного, в теории площадей и объемов и т. д.).

Триангуляции, покрывающие данное множество $A \subseteq R^n$, естественно образуют направленное множество: триангуляция β следует за триан-

* Под триангуляцией понимается множество τ попарно не пересекающихся открытых симплексов разного числа измерений, лежащих в данном R^n , удовлетворяющее двум условиям: 1° условие полноты: всякая грань симплекса, входящего во множество τ , сама входит как элемент в это множество; 2° условие локальной конечности: каждая точка, принадлежащая какому-нибудь симплексу $t \in \tau$, имеет в R^n окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом элементов множества τ . Теоретико-множественная сумма всех симплексов, являющихся элементами данной триангуляции τ , называется телом этой триангуляции и обозначается через $\tilde{\tau}$; всякое множество, являющееся телом некоторой триангуляции, локально компактно и называется полиэдром. Компактами являются лишь тела конечных триангуляций — конечные полиэдры. Триангуляции под названием «евклидовых комплексов» были впервые введены в 1935 г. в (1); в настоящее время бесконечные триангуляции составляют основной инструмент комбинаторной топологии незамкнутых множеств; см. (2, 3).

гуляцией α , если каждый симплекс $t_\beta \in \beta$ содержится в некотором (очевидно, единственном) симплексе триангуляции α — своем носителе в этой триангуляции. Если β следует за α , то определено отображение (проекция) π_α^β комплекса β в α : каждому симплексу $t_\beta \in \beta$ ставится в соответствие его носитель в α . Отождествляя симплексы с их остовами, можно считать, что π_α^β есть многозначное отображение множества всех вершин комплекса β во множество всех вершин комплекса α ; при этом автоматически оказывается, что остову произвольного симплекса $t_\beta \in \beta$ соответствует остов его носителя в α , так что полученные отображения π_α^β , которые мы будем называть геометрическими проекциями, являются непосредственным обобщением симплициальных отображений.

Направленное множество всех триангуляций, покрывающих множество A , вместе с геометрическими проекциями этих триангуляций называется геометрическим спектром множества A в R^n (см. (4), §1, где этот спектр введен под названием полного геометрического спектра).

Наша задача в настоящей заметке — ответить на следующий вопрос: *каким условиям должны удовлетворять геометрические спектры множеств $A \subseteq R^n$ и $A' \subseteq R^n$ для того, чтобы эти множества были гомеоморфны?*

Для решения этой задачи нам надо ввести понятие абстрактного спектра, что и будет сейчас сделано.

2. Основные вспомогательные понятия. Пусть дано направленное множество звездно-конечных комплексов $\alpha, \beta, \dots$, причем если $\beta > \alpha$ (т. е. комплекс β следует за комплексом α), то каждой вершине e_β комплекса поставлено в соответствие конечное множество $\pi_\alpha^\beta e_\beta$ вершин комплекса α , образующее остов некоторого симплекса этого комплекса. Если при этом вершины $e_{\beta_0}, \dots, e_{\beta_r}$ комплекса β образуют остов некоторого симплекса t_β этого комплекса, то и сумма $\pi_\alpha^\beta e_{\beta_0} \cup \dots \cup \pi_\alpha^\beta e_{\beta_r}$ образует остов некоторого симплекса $t_\alpha = \pi_\alpha^\beta t_\beta$. Определенное таким образом отображение комплекса β в α называется проекцией комплекса β в комплекс α и обозначается через π_α^β . Предполагается, что совокупность всех π_α^β удовлетворяет следующему ослабленному условию транзитивности*:

$$\pi_\alpha^\beta \pi_\beta^\gamma e_\gamma \subseteq \pi_\alpha^\gamma e_\gamma.$$

Направленное множество комплексов $\alpha, \beta, \dots$ вместе с проекциями π_α^β и называется абстрактным спектром.

Спектр $\Sigma' = (\alpha', \pi_{\alpha'}^{\beta'})$ называется частью спектра $\Sigma = (\alpha, \pi_\alpha^\beta)$, если имеет место следующее: каждое $\alpha' \in \Sigma'$ является вместе с тем и некоторым $\alpha \in \Sigma$; если $\beta' > \alpha'$ в Σ' , то $\beta' > \alpha'$ и в Σ , и, наконец, при $\beta' > \alpha'$ в Σ' всегда $\pi_{\alpha'}^{\beta'} e_{\beta'} \subseteq \pi_\alpha^{\beta'} e_{\beta'}$.

Основным для всего дальнейшего является понятие проекционного множества: этим именем обозначается всякое множество $\xi = \{e_{\alpha'}\}$ вершин, взятых из некоторых комплексов α' спектра Σ , удовлетворяющее следующим условиям:

1°. Каково бы ни было $\alpha \in \Sigma$, в ξ имеется вершина $e_\alpha \in \alpha$.

2°. Каково бы ни было конечное число вершин $e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_s}$ из ξ , найдется такое $\alpha_0 = \alpha_0(e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_s})$, что для любого $e_\alpha \in \xi$, для которого

* В геометрическом спектре, образующем, очевидно, частный случай абстрактного спектра, выполнена даже полная транзитивность: $\pi_\alpha^\beta \pi_\beta^\gamma = \pi_\alpha^\gamma$.

$\alpha > \alpha_0$, каждая из вершин $e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_s}$ содержится в проекции вершины e_α :

$$e_{\alpha_1} \in \pi_{\alpha_1}^\alpha e_{\alpha'}, \dots, e_{\alpha_s} \in \pi_{\alpha_s}^\alpha e_{\alpha'}.$$

Замечание. Из этого определения следует, что пересечение проекционного множества ξ с любым комплексом α конечно и образует остов некоторого симплекса комплекса α .

Теперь определяем конфинальность: пусть спектр Σ' есть часть спектра Σ . Мы говорим, что Σ' есть конфинальная часть спектра Σ , если выполнены следующие условия:

(а) пополняя произвольное проекционное множество спектра Σ' проекциями в Σ всех его элементов и рассматривая в пополненном множестве проекции, как они определены в Σ , всегда получаем проекционное множество спектра Σ .

(б) беря в произвольном проекционном множестве спектра Σ лишь элементы, принадлежащие спектру Σ' , и рассматривая лишь проекции, определенные в Σ' , всегда получаем проекционное множество спектра.

3. Основной результат: теорема о гомеоморфизме точечных множеств.

Теорема 1. Пусть $A \subseteq R^n$ и $A' \subseteq R^{n'}$ — два множества. Для того чтобы они были гомеоморфны между собою, необходимо и достаточно, чтобы существовал абстрактный спектр Σ , содержащий конфинальные части σ и σ' , являющиеся в то же время конфинальными частями геометрических спектров множеств A и A' , соответственно, в R^n и $R^{n'}$.

Частные случаи. Если данное множество A есть компакт, то естественно среди покрывающих его триангуляций рассматривать лишь конечные и соответственно изменить определение геометрического спектра. В этом случае в формулировке теоремы о гомеоморфизме можно предполагать, что спектр Σ состоит тоже лишь из конечных комплексов.

Для частного случая полиэдров имеет место следующая

Теорема 2. Пусть $A \subset R^n$ и $A' \subset R^{n'}$ — два полиэдра и τ, τ' — некоторые определенные их триангуляции. Для того чтобы полиэдры $A = \tilde{\tau}$ и $A' = \tilde{\tau'}$ были гомеоморфны, необходимо и достаточно, чтобы существовал абстрактный спектр, содержащий спектры Σ_τ и $\Sigma_{\tau'}$ (определенные в п. 1) в качестве своих конфинальных частей. При этом, если полиэдры A и A' имеют размерность r , то можно предположить, что спектр Σ состоит из r -мерных комплексов.

4. Наметим вкратце доказательство теоремы о гомеоморфизме. Спектр Σ , общий для двух гомеоморфных между собою множеств A и A' , есть так называемый «открытый спектр» множества A (и множества A'); он строится из нервов открытых звездно-конечных покрытий $\alpha, \beta, \dots$ множества A (или, что то же, множества A'). Проекции определяются так: полагаем $\beta > \alpha$, если замыкание каждого элемента $e_\beta \in \beta$ содержится в некотором элементе покрытия α . Беря все элементы покрытия α , содержащие замыкание данного элемента $e_\beta \in \beta$, мы и получаем $\pi_\alpha^\beta e_\beta$. Так определенный спектр приходится еще подвергнуть некоторой мультипликации (см., например (3), гл. 2). Спектры σ и σ' суть в основном спектры, состоящие из канонических комплексов (см. (2), § 3, или (3, 4)), покрывающих, соответственно, множества A и A' .

Для доказательства достаточности условия, высказанного в теореме о гомеоморфизме, надо прежде всего определить пространство данного спектра. Точками пространства спектра являются так называемые нити, т. е. проекционные множества, содержащие наряду с каким-либо

из своих элементов любую проекцию этого элемента. Окрестности определяются как обычно в таких случаях. Доказывается, что данный спектр и любая его конфинальная часть имеют одно и то же пространство. Наконец, доказывается, что пространство как открытого, так и геометрического спектра данного множества есть само это множество. Отсюда и следует достаточность данного выше условия гомеоморфизма двух множеств.

Поступило
3 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Р. Alexandroff, Н. Hopf, Topologie, Berlin, 1935. ² П. Александров, Матем. сборн., 21, 161 (1947). ³ К. Ситников, там же, 34, 3 (1954). ⁴ П. Александров, там же, 33, 241 (1953).