

В. А. ИЛЬИН

ДИФФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА НЕИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕМ КЛИНЕ И ЗАДАЧА О БЕРЕГОВОЙ РЕФРАКЦИИ

(Представлено академиком Б. А. Введенским 31 V 1954)

В этой статье решается задача о диффракции электромагнитных волн на неидеально проводящем клине и связанная с ней задача о береговой рефракции (при этом рассматривается диффракция как от плоской волны, так и от точечного источника или от «светящейся линии»).

Диффракция электромагнитных волн на «неидеальном» клине рассматривалась в работе (1). Автор указанной работы находит «точное» решение задачи с краевыми условиями 1-го порядка. В ранее опубликованной нами работе (2) мы показали недостаточность использования для поверхности с угловой линией краевых условий 1-го порядка. Из результатов, полученных нами в работе (2), вытекает, что решение, найденное автором работы (1), отличается от правильного результата на сколь угодно большую величину в зоне, прилегающей к ребру клина.

1. Рассмотрим сначала диффракцию электромагнитных волн на клине от точечного источника или от «светящейся линии». В работе (2) нами указан общий метод сведения краевых задач для неидеально проводящих тел к соответствующим «идеальным» задачам. Поэтому, используя результаты этой работы и принимая во внимание, что решение соответствующей «идеальной» задачи найдено Зоммерфельдом (3) и рядом других авторов, мы можем непосредственно записать решение задачи о диффракции на неидеальном клине от точечного источника или от «светящейся линии». В качестве примера приведем выражение магнитного потенциала Π_2 задачи о диффракции от «светящейся линии» с точностью до членов 2-го порядка относительно $\omega = k/k_0$:

$$\begin{aligned} \Pi_2(P, M_0) = & \bar{\Pi}_2(P, M_0) + \frac{i\varepsilon\mu_0\omega}{2\pi c} \omega \int_{\Gamma} \bar{\Pi}_2(P, M) \bar{\Pi}_2(M, M_0) ds_M + \\ & + \left(\frac{i\varepsilon\mu_0\omega}{2\pi c} \right)^2 \omega^2 \iint_{\Gamma\Gamma} \bar{\Pi}_2(P, M) \bar{\Pi}_2(M, N) \bar{\Pi}_2(N, M_0) ds_M ds_N - \\ & - \frac{\varepsilon\mu_0\omega}{4\pi kc} \omega^2 |\pi - \alpha| \bar{\Pi}_2(P, S) \bar{\Pi}_2(S, M_0). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\bar{\Pi}_2$ — известное решение «идеальной» задачи (3); $M_0(r_0, \varphi_0)$ — след «светящейся линии»; S — ребро клина, Γ — контур клина, α — внешний угол клина. Вблизи ребра определяющую роль играет последний член, который после вычисления приводится к виду

$$- \frac{\pi\varepsilon\mu_0\omega}{\alpha^2 kc} \omega^2 |\pi - \alpha| H_0^{(2)}(kr) H_0^{(2)}(kr_0). \quad (2)$$

Этот член, в соответствии с изложенным в работе ⁽²⁾, имеет логарифмическую особенность на ребре клина (т. е. при $r=0$), в то время как все другие члены в решении (1) ограничены. Таким образом, вблизи ребра клина потенциал Π_2 определяется формулой (2).

2. Укажем теперь несколько иной путь решения задачи для частного случая, когда внешний угол «неидеального» клина составляет целую долю π . Покажем, что эта задача может быть решена при помощи несколько видоизмененного метода отражений. Метод отражений, как известно, является одним из самых распространенных методов решения «идеальных» задач, т. е. краевых задач с однородным краевым условием 1-го или 2-го рода. Если перейти к соответствующим «неидеальным» задачам, то вместо однородных краевых условий 1-го или 2-го рода, являющихся выражением идеальной проводимости, следует поставить приближенные краевые условия Леонтовича, т. е. однородные краевые условия 3-го рода. Известно, что метод отражений не проходит для краевых условий 3-го рода.

В предлагаемой работе мы не занимаемся отысканием «точного» решения с приближенным краевым условием 1-го или 2-го порядка. Мы ищем решение с той же точностью, с какой заданы краевые условия. Оказывается, что в этом случае с некоторым видоизменением проходит обычный метод отражений, при помощи которого задача сводится к хорошо изученному случаю полупространства ⁽⁴⁾.

Рассмотрим клин, внешняя часть которого определена полярными углами $\varphi=0$ и $\varphi=\alpha$; $\pi/\alpha=N$ — целое число.

Возьмем две совокупности точек:

$$\begin{cases} P_{2n+1}(r_1, \varphi_1 + 2n\alpha, z_1) \\ P_{2n}(r_1, 2n\alpha - \varphi_1, z_1) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} M_{2n+1}(r, \varphi + 2n\alpha, z) \\ M_{2n}(r, 2n\alpha - \varphi, z). \end{cases}$$

Продолжим грани клина I и II по другую сторону ребра, получим бесконечные плоскости I и II.

Обозначим через $Z_I(P_n, M)$ магнитный потенциал задачи о диффракции на «неидеальном» полупространстве с границей I от источника, помещенного в точку P_n . Аналогично вводится Z_{II} . Через $\bar{Z}_I$ и $\bar{Z}_{II}$ обозначаются магнитные потенциалы соответствующих «идеальных» задач.

Применяя обычный метод отражений для «идеального» клина, получим:

$$\bar{\Pi}_2(P_1, M) = \sum_{n=1}^N \bar{Z}_I(P_n, M) \quad \bar{\Pi}_2(P_1, M) = \sum_{n=2}^{N+1} \bar{Z}_{II}(P_n, M). \quad (3)$$

(в первом случае отражение производится в грани I, а во втором — в грани II).

Согласно изложенному в работе ⁽²⁾, потенциал Π_2 с точностью до членов 1-го порядка представляется в виде:

$$\Pi_2(P_1, M_1) = \bar{\Pi}_2(P_1, M_1) + \frac{i\epsilon\mu\omega}{4\pi c} w \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Gamma} \bar{\Pi}_2(P_1, M) \bar{\Pi}_2(M, M_0) dz ds_M. \quad (4)$$

Сведение рассматриваемой задачи к полупространству мы произведем путем двух операций: 1) путем замены интегрирования по двум полубесконечным прямым, составляющим контур клина Γ , на интегрирование по двум бесконечным прямым I и II; 2) путем замены подынтегральной функции при помощи формул (3).

В результате получим следующую формулу, сводящую задачу о

диффракции на «неидеальном» клине к суперпозиции конечного числа задач о диффракции на «неидеальном» полупространстве:

$$\Pi_2(P_1, M_1) = \bar{\Pi}_2(P_1, M_1) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N Z_I(P_m, M_n) - \frac{1}{2} \sum_{m=2}^{N+1} \sum_{n=2}^{N+1} Z_{II}(P_m, M_n). \quad (5)$$

Наряду с «принципом отражений» (5) может быть обоснован «уточненный» принцип отражений, представляющий с точностью до членов второго порядка относительно ω решение задачи о диффракции на «неидеальном» клине в виде суммы добавочного члена, производящего учет влияния ребра и изученного в работе (2), и суперпозиции конечного числа решений задачи о диффракции на полупространстве.

Предлагаемый здесь принцип отражений применим не только к «неидеальному» клину, но и к другим «неидеальным» задачам, например, к прямоугольному волноводу.

3. Для того, чтобы решить задачу о диффракции плоской волны на клине, отметим, что все результаты, полученные в работе (2) для диффракции от точечного источника, переносятся на случай диффракции плоской волны путем формальной замены начального возбуждения в форме решения «идеальной» задачи $\Pi(M, M_0)$ от источника, помещенного в точке M_0 , на начальное возбуждение в форме решения «идеальной» задачи $B(M, \varphi_0)$ от плоской волны, падающей в направлении φ_0 . Ввиду краткости этой статьи строгое доказательство этого утверждения мы опустим.

Решение задачи о диффракции на «неидеальном» клине нетрудно представить в виде ряда по цилиндрическим функциям. При этом вблизи ребра определяющую роль будет играть первый член ряда. Для электрического потенциала Π_1 этот член имеет вид:

$$\frac{8\pi\mu kc}{\mu_0\omega\alpha} e^{i\frac{\pi^2}{2\alpha}} \sin \frac{\pi}{\alpha} \varphi_0 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sin \frac{\pi}{\alpha} m\varphi_1}{(\pi - \alpha)^2 - \pi^2 m^2} \right) J_{\frac{\pi}{\alpha} - 1}(kr_1).$$

Для клина с внешним углом α , меньшим π , этот член определяет порядок нуля потенциала Π_1 на ребре клина, а для $\alpha < \pi$ приведенный член определяет характер особенности Π_1 на ребре.

Для потенциала Π_2 решающую роль вблизи ребра будет играть добавочный член, производящий учет влияния ребра. Таким образом, для клина с внешним углом α , меньшим π , электрический потенциал Π_1 убывает, в то время как магнитный потенциал Π_2 неограниченно растет при приближении к ребру.

4. Последний результат мы используем при решении так называемой задачи о береговой рефракции.

Указанная задача решена в работе (5) путем сведения к интегральному уравнению с ядром, зависящим от модуля разности аргументов. При решении авторы делают ряд упрощений: 1) море считают идеальным проводником; 2) сушу считают хорошим проводником по сравнению с воздухом, при этом проводимость суши считают постоянной; 3) считают, что поверхность моря и поверхность суши образуют одну плоскость.

Метод, предложенный нами в работе (2), позволяет непосредственно написать решение поставленной в работе (5) задачи. Этот метод позволяет также ослабить некоторые упрощения, сделанные в работе (5).

Мы считаем, что поверхность суши составляет некоторый небольшой угол с поверхностью моря, что в ряде случаев более соответствует реальной картине. При этом, исходя из конечной проводимости морской воды и учитывая непрерывное возрастание проводимости суши при приближении к береговой линии, мы приходим к следующему результату: для волн, у которых электрическое поле поляризовано перпендикулярно береговой линии, сила принимаемых сигналов возрастает при приближении приемника к береговой линии; для волн, у которых магнитное поле поляризовано перпендикулярно береговой линии, имеет место противоположный эффект (сигнал ослабевает при приближении к береговой линии).

Автор пользуется возможностью принести глубокую благодарность проф. А. Н. Тихонову.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
25 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Г. Д. Малюжинец, Диссертация, Автореферат, ФИАН, Изд. АН СССР, 1951. ² В. А. Ильин, ДАН, 97, № 2 (1954). ³ Франк и Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, 2, 1937, гл. XX, стр. 849. ⁴ Там же, гл. XXIII, стр. 937. ⁵ Г. А. Гринберг, В. А. Фок, Исследования по распространению радиоволн, сборн. 2, Изд. АН СССР, 1948, стр. 69.