

И. З. КАЛИШЕВИЧ

ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОГО ВИХРЕВОГО СВЕРХЗВУКОВОГО ДВИЖЕНИЯ ГАЗА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 17 VIII 1954)

Рассмотрим плоское установившееся вихревое движение идеальной сжимаемой жидкости при постоянном теплосодержании.

Если выбрать за независимые переменные давления p и функцию тока ψ , то систему уравнений, характеризующую установившееся движение плоско-параллельного потока идеальной сжимаемой жидкости, как показано Л. И. Седовым⁽¹⁾, можно записать:

$$\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial p} V^2 \frac{\partial \theta}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{V(\partial \theta / \partial p)^2 - \partial^2 V / \partial p^2}{\partial \theta / \partial \psi} \right]; \quad (1)$$

$$dz = \rho_0 e^{i\theta} \left[\left(-i \frac{\partial V}{\partial p} + V \frac{\partial \theta}{\partial p} \right) d\psi + \frac{V(\partial \theta / \partial p)^2 - \partial^2 V / \partial p^2}{\partial \theta / \partial \psi} dp \right], \quad (2)$$

где $z = x + iy$; V — величина скорости; θ — угол наклона вектора скорости к оси x ; ρ_0 — некоторая постоянная.

Взяв в качестве независимых переменных p и θ , Ю. В. Руднев⁽²⁾ приводит эту систему уравнений к виду:

$$V \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial V}{\partial p} \frac{\partial \psi}{\partial p} + \frac{\partial V}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial p} \right)^2 - \frac{\partial^3 V}{\partial p^2 \partial \psi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^2 = 0; \quad (3)$$

$$dz = -\rho_0 e^{i\theta} \left[\left(V \frac{\partial \psi}{\partial p} + i \frac{\partial V}{\partial p} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) d\theta + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + i \frac{\partial V}{\partial p} \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) dp \right]. \quad (4)$$

Функция $V(p, \psi)$ считается в этих системах уравнений известной функцией и определяется из интеграла Бернулли.

Следовательно, для решения задачи необходимо проинтегрировать квазилинейное уравнение (3) и квадратурой из уравнения (4) определить функцию $z(p, \theta)$, которая даст переход к плоскости независимых переменных x и y .

Основное предположение работы заключается в том, что функция $\vartheta^h(\psi) = p/\rho^h$, характеризующая энтропию потока, может быть представлена в виде суммы двух слагаемых:

$$\vartheta(\psi) = \bar{\vartheta} + \tilde{\vartheta}(\psi), \quad (5)$$

постоянного $\bar{\vartheta}$ и переменного $\tilde{\vartheta}(\psi)$, таких, что квадратом отношения $\tilde{\vartheta}(\psi)$ к $\bar{\vartheta}$ можно пренебречь по сравнению с единицей — это основное предположение работы. Для интегрирования уравнения (3) используем работу С. В. Валландера⁽³⁾, в которой показано, что нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + A(\xi, \eta, u) \frac{\partial u}{\partial \xi} + B(\xi, \eta, u) \frac{\partial u}{\partial \eta} + C(\xi, \eta, u) \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} + D(\xi, \eta, u) = 0 \quad (6)$$

могут быть проинтегрированы по формуле

$$N(\xi, \eta, u) = v(\xi, \eta), \quad (7)$$

где $N(\xi, \eta, u)$ — некоторая фиксированная функция, а $v(\xi, \eta)$ — произвольное решение некоторого линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, имеющего вид:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \alpha(\xi, \eta) \frac{\partial v}{\partial \xi} + \beta(\xi, \eta) \frac{\partial v}{\partial \eta} + \gamma(\xi, \eta) v = 0, \quad (8)$$

если коэффициенты A, B, C, D удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\partial A}{\partial \xi} + AB - \frac{\partial D}{\partial u} - DC \right] &= 0; \\ \frac{\partial A}{\partial \xi} &= \frac{\partial B}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial C}{\partial \eta} = \frac{\partial A}{\partial u}, \quad \frac{\partial C}{\partial \xi} = \frac{\partial B}{\partial u}. \end{aligned} \quad (9)$$

При этом коэффициенты уравнения (8) должны удовлетворять системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \alpha\beta - \gamma &= \frac{\partial A}{\partial \xi} + AB - \frac{\partial D}{\partial u} - DC = F_1(\xi, \eta), \\ \frac{\partial \beta}{\partial \eta} + \alpha\beta - \gamma &= \frac{\partial B}{\partial \eta} + AB - \frac{\partial D}{\partial u} - DC = F_2(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (10)$$

а функция N , входящая в (7), находится из соотношения

$$\frac{\partial N}{\partial u} = e^{\int [(B-\beta) d\xi + (A-\alpha) d\eta + C du]}, \quad (11)$$

в котором под знаком интеграла стоит полный дифференциал, причем N должна быть найдена такой, чтобы было справедливо равенство

$$D \frac{\partial N}{\partial u} = \frac{\partial^2 N}{\partial \xi \partial \eta} + \alpha(\xi, \eta) \frac{\partial N}{\partial \xi} + \beta(\xi, \eta) \frac{\partial N}{\partial \eta} + \gamma(\xi, \eta) N, \quad (12)$$

при этом такое определение N всегда возможно.

Введем безразмерные величины

$$\lambda = \frac{V}{a_*}, \quad \sigma = \frac{p}{\rho_0 V_0^2}, \quad \vartheta_*(\psi) = (\rho_0 V_0^2)^{\frac{k-1}{k}} \frac{\vartheta(\psi)}{i_0}, \quad (13)$$

где V_0 — некоторая постоянная скорость, a_* — критическая скорость звука, и перепишем уравнение (3) в виде

$$\lambda \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \sigma^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} + \frac{\partial \lambda}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right)^2 - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \sigma^2 \partial \psi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^2 = 0. \quad (14)$$

Здесь λ — функция ψ и σ , определяемая из интеграла Бернулли

$$\lambda = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \sqrt{1 - \frac{k}{k-1} \sigma^{\frac{k-1}{k}} \vartheta_*(\psi)}. \quad (15)$$

Уравнения характеристик уравнения (14) имеют вид

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \sigma^2}} d\sigma \pm d\theta = 0. \quad (16)$$

Чтобы характеристики уравнения (14) не зависели от решения ψ , как это требует вид уравнения (5), необходимо и достаточно, чтобы производная по ψ от коэффициента в уравнении (16) была равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \sigma^2} \right) = 0. \quad (17)$$

Функция $\lambda(\psi, \sigma)$ в виде (15) не удовлетворяет этому условию.

Используя основное предположение работы и подставляя (5) в интеграл Бернулли (15), разложим его по степеням $\bar{\Phi}_*(\psi)$ и ограничимся лишь двумя членами. Тогда (15) запишется в виде

$$\lambda(\psi, \sigma) = w_1(\sigma) + w_2(\sigma) \bar{\Phi}_*(\psi), \quad (18)$$

где

$$w_1(\sigma) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \sqrt{1 - \frac{k}{k-1} \sigma^{\frac{k-1}{k}} \bar{\Phi}_*}; \quad w_2(\sigma) = - \frac{\frac{k}{k-1} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \sigma^{\frac{k-1}{k}}}{\sqrt{1 - \frac{k}{k-1} \sigma^{\frac{k-1}{k}} \bar{\Phi}_*}}. \quad (19)$$

Условие (17) после подстановки выражения (18) примет вид

$$\frac{w_2''(\sigma)}{w_2(\sigma)} = \frac{w_1''(\sigma)}{w_1(\sigma)}. \quad (20)$$

Приравняв отношение (20) произвольной функции $m(\sigma)$, можно определить функции $w_1(\sigma)$ и $w_2(\sigma)$, удовлетворяющие условию (17). Но эти функции будут отличаться от функций (19). Как показало исследование, удобнее за произвольную функцию $m(\sigma)$ взять просто произвольную постоянную m ; получающиеся при этом функции $w_1(\sigma)$ и $w_2(\sigma)$ позволяют точно удовлетворить условиям (9) и дают хорошую аппроксимацию их истинных выражений.

Из уравнений (20) получим функции

$$w_1(\sigma) = c_1 e^{m\sigma} + c_2 e^{-m\sigma}; \quad w_2(\sigma) = c_3 e^{m\sigma} + c_4 e^{-m\sigma}, \quad (21)$$

в которых m, c_1, c_2, c_3, c_4 — произвольные постоянные (зависящие от параметра $\bar{\Phi}_*$, так как семейства функций $w_1(\sigma)$ и $w_2(\sigma)$ зависят от этого параметра согласно формулам (19)).

Таким образом, если $\lambda(\psi, \sigma)$ взять в виде

$$\lambda(\psi, \sigma) = (c_1 e^{m\sigma} + c_2 e^{-m\sigma}) + (c_3 e^{m\sigma} + c_4 e^{-m\sigma}) \bar{\Phi}_*(\psi), \quad (22)$$

то характеристики будут независимы от решения $\psi(\sigma, \theta)$, и их уравнения (16) можно написать в виде

$$m\tau + \theta = 2\xi; \quad m\tau - \theta = 2\eta. \quad (23)$$

Уравнение (14) в характеристических координатах имеет вид

$$\left(m^2 \lambda + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \sigma^2}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + 2m \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) + \left(m^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \psi} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \sigma^2 \partial \psi}\right) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0, \quad (24)$$

где $\lambda(\psi, \sigma)$ выражается формулой (22).

Очевидно, что уравнение (24) может быть записано в виде (6), и легко проверить, что коэффициенты A, B, C, D удовлетворяют условиям (9).

Система уравнений (10) в нашем случае примет вид

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \alpha \beta - \gamma = 1; \quad \frac{\partial \beta}{\partial \eta} + \alpha \beta - \gamma = 1. \quad (25)$$

Положим $\gamma = 0$, $\alpha(\xi + \eta) = \beta(\xi + \eta)$, тогда из системы (25) получим

$$\alpha = \text{cth}(\xi + \eta + a), \quad (26)$$

где a — произвольная постоянная.

Линейное уравнение (8) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \operatorname{cth}(\xi + \eta + a) \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (27)$$

Используя интеграл Бернулли, легко показать, что $\xi + \eta$ для сверхзвуковых движений газа изменяется в пределах $0 \leq \xi + \eta < 0,82$, и коэффициент при первых производных в уравнении (27) при использовании произвольной постоянной a с достаточной точностью может быть заменен функцией $\frac{1}{\xi + \eta + a}$. Следовательно, вместо уравнения (27) будем решать уравнение Дарбу с показателем единица:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{\xi + \eta + a} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (28)$$

Подставляя в (7) общее решение уравнения (28) и $N(\xi, \eta, \psi)$, найденное из отношения (11), получим соотношение, из которого определится $\psi(\xi, \eta)$ — общее решение уравнения (24):

$$[(c_1 e^{\xi+\eta} + c_2 e^{-\xi-\eta}) \psi(\xi, \eta) + (c_3 e^{\xi+\eta} + c_4 e^{-\xi-\eta}) \chi(\psi)] = \Phi_1(\xi) + \Phi_2(\eta), \quad (29)$$

содержащее три произвольные функции: $\Phi_1(\xi)$, $\Phi_2(\eta)$ и $\chi(\psi)$, причем функция, характеризующая распределение энтропии, определяется через произвольную функцию $\chi(\psi)$ по формуле

$$\tilde{\Phi}_*(\psi) = \frac{d\chi}{d\psi}.$$

В зависимости от условий задачи функция $\chi(\psi)$ может быть задана или должна определяться, так же как и $\Phi_1(\xi)$, $\Phi_2(\eta)$, из краевых условий задачи.

Решение получено в характеристических координатах, от которых по формулам (23) легко перейти к переменным σ, θ . На основании формулы (4) переход к плоскости x, y можно проделать по формулам

$$x = \frac{r_1}{\lambda_0} \int \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \sin \theta - \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \cos \theta \right) d\theta + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \sin \theta - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \sigma^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cos \theta \right) d\sigma \right], \quad (30)$$

$$y = - \frac{1}{\lambda_0} \int \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cos \theta + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \sin \theta \right) d\theta + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \cos \theta - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \sigma^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \sin \theta \right) d\sigma \right],$$

где $\lambda_0 = V_0/a_*$.

В формулах (30) под знаком интеграла стоят полные дифференциалы при точном интегрировании уравнения (3), но подинтегральные выражения остаются полными дифференциалами и при полученном нами приближенном решении $\psi(\sigma, \theta)$, если под $\lambda(\psi, \sigma)$ подразумевать выражение (22) в переменных σ, θ .

Полученное общее решение может быть использовано для решения краевых задач плоского установившегося сверхзвукового движения газа с переменной энтропией.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
11 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, 1950.
² Ю. В. Руднев, Сборн. ст., № 4, Теоретическая гидромеханика, под ред.
Л. И. Седова, 1949. ³ С. В. Валландер, Вестн. ЛГУ, № 5 (1954).