

В. И. ШУЛИКОВСКИЙ

ИНВАРИАНТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТРИКИ СПИРАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 11 VI 1954)

Сеть на поверхности в E_3 называется спиральной, если в ее параметрах линейный элемент имеет вид

$$ds^2 = e^{u+V(v)}(du^2 + dv^2).$$

Инвариантный признак спиральной сети, указываемый впервые, состоит из двух частей:

1. Первый и второй чебышевские векторы сети градиентны. Этим требованием характеризуется обобщенная спиральная сеть ((¹), стр. 26).

2. Сумма или разность потенциалов первого и второго чебышевских векторов есть гармоническая функция.

Другой признак спиральной сети состоит в том, что нормированный определенным образом касательный к линии сети вектор p_i удовлетворяет уравнению

$$p_i|_s = h\varepsilon_{si} - \sigma g_{si}, \quad (1)$$

где g_{si} — метрический тензор, ε_{si} — дискриминантный бивектор, $h = \text{const}$, $\sigma = \sigma(u^i)$.

Обратно, каждое решение уравнения (1) определяет спиральную сеть.

Таким образом, метрика спиральной поверхности характеризуется тем, что система четырех уравнений (1) с тремя неизвестными функциями p_i , σ совместна.

Условия интегрируемости системы (1) имеют вид ((²), п. 12):

$$p_i|_{s*} = K\tilde{p}_i = -\tilde{\sigma}_i \quad (\sigma_i = \partial_i\sigma), \quad (2)$$

где индексы подняты бивектором: $\theta^s = \varepsilon^{sk}\theta_k$, $\theta_s = \varepsilon_{ks}\theta^k$; тильда означает поворот вектора на прямой угол $\tilde{\theta}_s = g_s^k\theta_k$ и K — гауссова кривизна поверхности.

Заменяя в уравнениях (1) $p_i = -\frac{1}{K}\sigma_i$, получаем систему:

$$\sigma_i|_s = \frac{1}{K}\sigma_i K_s + K h \varepsilon_{si} - K \sigma g_{si}. \quad (3)$$

В силу симметрии левой части имеем

$$\sigma_i K^i = 2hK^2. \quad (4)$$

Условия интегрируемости (2) выполняются тождественно лишь для плоскости $K=0$, допускающей бесконечное множество спиральных сетей, линии которых состоят из логарифмических спиралей.

Поверхности $K = \text{const} \neq 0$ имеют лишь спиральные сети, для которых $h=0$. На соответствующем изгибании поверхности линии таких сетей являются меридианами и параллелями.

Считая $K \neq \text{const}$, положим

$$K_i|_s = N_s K_i + t_s \tilde{K}_i, \quad K_i = \partial_i K, \quad (5)$$

где $N_s = \frac{1}{2} \partial_s \ln \Delta_1 K$, $\Delta_1 K = g^{ik} K_i K_k$ и t_s — трансверсальный вектор поля K_i ((²), п. 9).

Из уравнения (4) дифференцированиями и исключениями вторых производных от функции σ при помощи (3) находим

$$3hKK_s - 2hK^2N_s = \sigma K \tilde{K}_s + \sigma_i \tilde{K}^i t_s. \quad (6)$$

Возможны три случая:

1. Векторы t_s и $\tilde{K}_s$ независимы или $t_s \tilde{K}^s \neq 0$. Функция σ определяется из (6):

$$\sigma = \frac{h(3K_s - 2KN_s) t^s}{\tilde{K}_s t^s}. \quad (7)$$

Подставляя это выражение σ в (3), получаем инвариантную характеристику метрики спиральной поверхности первого типа.

2. Имеет место зависимость $t_s = \lambda \tilde{K}_s$. В этом случае из (6) получаем

$$N_s = \frac{3}{2} \partial_s \ln K, \quad \Delta_1 K = cK^3, \quad (8)$$

$$\lambda \sigma_i \tilde{K}^i + \sigma K = 0. \quad (9)$$

Предполагая, что $\lambda_i K^i \neq 0$, из уравнения (9) дифференцированиями и исключениями получаем для функции σ выражение:

$$\sigma = \frac{\lambda h K^2 (2 + c \lambda K + 2c \lambda^2 K^2)}{\lambda_s K^s}. \quad (10)$$

позволяющее указать характеристику метрики спиральной поверхности второго типа.

3. Имеют место зависимости $t_s = \lambda K_s$, $\lambda = \lambda(K)$, характеризующие метрику поверхности вращения. Эта метрика характеризуется условиями

$$\Delta_1 K_s^s = cK^3, \quad t_s^s = \frac{c_1}{K} \tilde{K}_s, \quad c_1^2 + \frac{1}{2} c_1 + \frac{1}{c} = 0. \quad (11)$$

Линейный элемент этой метрики приводится к виду:

$$ds^2 = pu^2 + u^{-4c_1} dv^2. \quad (12)$$

Линии спиральных сетей определяются уравнениями:

$$\sigma = -\frac{4h}{c} (v^2 + m) u^{\frac{2}{cc_1}} = \text{const}, \quad \tilde{\sigma} \left(\frac{cc_1}{2} u^{\frac{2}{cc_1}} \right)^2 + (v + m)^2 = \text{const}, \quad (13)$$

где m — постоянная, определяющая переход от одной спиральной сети к другой. Вид уравнений (12) показывает, что спиральные сети на поверхностях вращения этого типа переходят друг в друга при вращении поверхности вокруг оси.

Пример 1. При $c = 16$, $c_1 = -\frac{1}{4}$ имеем поверхность: $2z = r \sqrt{r^2 - 1} - \ln(r + \sqrt{r^2 - 1})$, $r^2 = x^2 + y^2$, $ds^2 = du^2 + u dv^2$, наложимую на мнимый линейчатый геликоид Гамбье.

Пример 2. При $c = -2$, $c_1 = -1$ имеем поверхность: $4z = \arcsin 2\sqrt{r} + 2\sqrt{r}\sqrt{1 - 4r}$, $ds^2 = du^2 + u^4 dv^2$. В параметрах линий спиральной сети $\varphi = 2 \arcsin \sqrt{uv}$, $\psi = -2 \ln \left(\frac{1}{u^2} + v^2 \right)$ линейный элемент

имеет вид $ds^2 = e^{\frac{\psi + 4 \ln \cos \frac{\varphi}{2}}{2}} (d\psi^2 + d\varphi^2)$.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
12 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Я. С. Дубнов, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, в. 9, 7 (1952).
² В. И. Шуликовский, Уч. зап. КГУ, 112, кн. 10, 49 (1952).