

Л. Ш. ХОДЖАЕВ

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 14 VIII 1954)

Понятие задачи Коши для линейного уравнения нормального гиперболического типа в функциональном пространстве впервые было определено С. Л. Соболевым ⁽¹⁾, и им же эта задача была решена. В настоящей работе дается решение этой обобщенной задачи Коши для линейного параболического уравнения в смысле И. Г. Петровского ⁽²⁾:

$$Lu(x, t) \equiv \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \sum_{j=0}^{2p} L_j \left(\frac{\partial}{\partial x}, t \right) u(x, t) = f(x, t), \quad (1)$$

где

$$L_j \left(\frac{\partial}{\partial x}, t \right) \equiv \sum_{\substack{n \\ \sum_{s=1}^n k_s = j}} a_{(k_1, k_2, \dots, k_n)}(t) \frac{\partial^j}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}},$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, есть точка n -мерного евклидова пространства R_n , коэффициенты $a_{(k_1, k_2, \dots, k_n)}$ — непрерывные функции от t .

Из условия параболичности уравнения (1) следует, что

$$(-1)^p \sum_{\substack{n \\ \sum_{s=1}^n k_s = 2p}} a_{(k_1, k_2, \dots, k_n)}(t) \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \dots \alpha_n^{k_n} < -\delta \left(\sum_{s=1}^n \alpha_s^2 \right)^p$$

для всевозможных вещественных α_i , любого $t \in [0, t_0]$, постоянного $\delta > 0$.

К уравнению присоединено начальное условие

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (2)$$

где $\varphi(x)$ — заданная функция.

Пусть S_l — пространство функций ψ , имеющих непрерывные производные до порядка l и обращающихся тождественно в нуль каждая вне некоторой конечной области $(\Omega_x, [T_1, T_2])$, где Ω_x — некоторая конечная область пространства $x_1, x_2, \dots, x_n$, а $[T_1, T_2]$ — некоторый конечный промежуток времени t (С. Л. Соболев). Множество линейных функционалов пространства S_l обозначим через S_l^* . Через (ρ, ψ) обозначим число, полученное применением функционала ρ к функции ψ .

Определение (С. Л. Соболева ⁽¹⁾). Функционал $\rho \in S_l^*$ будем называть обращающимся в нуль в некоторой области D пространства $x_1, x_2, \dots, x_n, t$ и обозначать через $\rho|_D = 0$, если при любой функции $\psi \in S_l$ произведение (ρ, ψ) не зависит от значения ψ в D .

Следуя С. Л. Соболеву ⁽¹⁾, определим понятие задачи Коши для линейного параболического уравнения (1) в функциональном пространстве S_l^* .

Найти решения уравнения

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=0}^{2p} L_j \left(\frac{\partial}{\partial x}, t \right) u = \rho, \quad \rho|_{t \leq 0} = 0, \quad (3)$$

при начальных условиях

$$u|_{t \leq 0} = 0, \quad (4)$$

где u — искомый, а ρ — известный функционалы из S_l^* .

Здесь под функциональным уравнением (3) подразумевается равенство

$$\left(u, -\frac{\partial \psi}{\partial t} - \sum_{j=0}^{2p} L_j^* \left(\frac{\partial}{\partial x}, t \right) \psi \right) = (\rho, \psi) \text{ при любом } \psi \in S_l, \quad (5)$$

где

$$L_j^* \left(\frac{\partial}{\partial x}, t \right) = \sum_{\substack{n \\ \sum_{s=1}^n k_s = j}} a_{(k_1, k_2, \dots, k_n)}(t) \frac{\partial^j}{[\partial(-x_1)]^{k_1} [\partial(-x_2)]^{k_2} \dots [\partial(-x_n)]^{k_n}}.$$

Теорема 1. На линейном многообразии всех функционалов основного пространства S_l , обращающихся в нуль в области $t < 0$, удовлетворяющих при каждом фиксированном $t > 0$ и при любой функции $\psi \in S_l$ неравенству

$$|(u, \psi(x - x_0, t))| \leq c_1 \exp \left[c(\psi) |x_0|^{\frac{2p}{2p-1}} \right], \quad c_1 > 0, \quad (6)$$

где $c(\psi)$ — некоторая постоянная, зависящая от функции $\psi \in S_l$,

$|x_0| = \sqrt{\sum_{s=1}^n x_s^2}$, решение обобщенной задачи Коши (3) — (4) будет единственным.

Теорема 2. Если известный функционал $\rho \in S_l^*$ при каждом фиксированном $t > 0$ и при любой функции $\psi \in S_l$ удовлетворяет неравенству

$$|(\rho, \psi(x - x_0, t))| \leq c_1 \exp \left[c(\psi) |x_0|^{\frac{2p}{2p-1}} \right], \quad (7)$$

то на линейном многообразии всех функционалов, упомянутом в теореме 1, существует решение обобщенной задачи Коши (3) и (4).

Решение обобщенной задачи Коши (3) — (4) определяется равенством

$$(u, \psi) = \left(\rho, - \int_{t_1}^{t_0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - x_1, t, t_1) \psi(x, t) dx \right\} dt \right) \quad (8)$$

при любой функции $\psi \in S_l$, где через $\int_{-\infty}^{+\infty} dx$ обозначен интеграл по R_n , а функция $G(x - x_1, t, t_1)$ определяется по формуле

$$G(x - x_1, t, t_1) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[\int_{t_1}^t \sum_{j=0}^{2p} L_j(i\alpha, t) dt + i\alpha(x - x_1) \right] d\alpha, \quad (9)$$

$$L_j(i\alpha, t) = \sum_{\substack{n \\ \sum_{s=1}^n k_s = j}} a_{(k_1, k_2, \dots, k_n)}(t) (i\alpha_1)^{k_1} (i\alpha_2)^{k_2} \dots (i\alpha_n)^{k_n},$$

$$\alpha(x - x_1) = \sum_{s=1}^n \alpha_s(x_s - x'_s), \quad d\alpha = d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n.$$

Рассмотрим один частный случай уравнения (3), а именно уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \rho, \quad \rho|_{t=0} = 0, \quad (10)$$

где Δ — оператор Лапласа в трехмерном пространстве x_1, x_2, x_3 . Неравенство (7) для уравнения (10) примет вид

$$|(\rho, \psi(x - x_0, t))| \leq c_1 \exp[c(\psi)|x_0|^2], \quad (11)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $x_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ — точки в R_n , $|x_0| = \sqrt{x_1^{0^2} + x_2^{0^2} + x_3^{0^2}}$.

Решение обобщенной задачи Коши для (10) определяется формулой

$$(u, \psi) = \left(\rho, -\frac{1}{8\pi^{3/2}} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x-x_1)^2}{4(t-t_1)}\right)}{(t-t_1)^{3/2}} \psi(x, t) dx \right\} dt \right) \quad (12)$$

при любой функции $\psi \in S_I$, где

$$|x - x_1| = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2}.$$

Рассмотрим два простейших примера.

1. Пусть $\rho = \delta^{(x_2, t_2)}$. Этот функционал определяется по формуле $(\delta^{(x_2, t_2)}, \psi) = \psi(x_2, t_2)$ при любом $\psi \in S_I$, где (x_2, t_2) — некоторая фиксированная точка. Тогда из (12) получим следующее решение обобщенной задачи Коши:

$$u = -\frac{1}{8\pi^{3/2}} \frac{\exp\left(-\frac{|x - x_2|^2}{4(t - t_2)}\right)}{(t - t_2)^{3/2}} \quad \text{при } t > t_2; \quad u = 0 \quad \text{при } t < t_2. \quad (13)$$

2. $\rho = [\lambda(t) e^{\varepsilon r} \sin \mu(r)]$, где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$; $\lambda(t)$ — некоторая непрерывная функция, такая, что $\lambda(t)|_{t=0} = 0$ и $\mu(r)$ — некоторая другая непрерывная функция, возрастающая на бесконечности быстрее чем $e^{\varepsilon r}$. При этом решение обобщенной задачи Коши существует.

Интересно отметить, что этот функционал не будет элементом пространства функционалов над быстро убывающими функциями K^P , рассмотренными И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым⁽³⁾, так как функция $e^{\varepsilon r}$ не принадлежит к допустимому классу мультипликаторов для пространства K^P . Функция $e^{\varepsilon r}$ и ее производные растут быстрее, чем $e^{\varepsilon r}$, где $\varepsilon > 0$.

Таджикский государственный
университет
Сталинабад

Поступило
13 VIII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. Л. Соболев, Матем. сборн., 42, № 2 (1935). ² И. Г. Петровский, Бюлл. МГУ, секция А, 1, в. 7 (1933). ³ И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, Усп. матем. наук, 8, в. 6 (58) (1953).