

Д. СУПРУНЕНКО

О НИЛЬПОТЕНТНЫХ ТРАНЗИТИВНЫХ ПОДГРУППАХ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 20 VIII 1954)

В этой заметке доказывается сопряженность всех максимальных транзитивных нильпотентных подгрупп симметрической группы.

Отметим сначала, что для простого p нильпотентная транзитивная подгруппа N симметрической группы S_p является циклической группой порядка p . Действительно, порядок N делится на p , ибо N транзитивна. В силу нильпотентности N порядок ее центра тоже делится на p . Следовательно, в центре группы N содержится p -членный цикл. Отсюда вытекает, что всякая подстановка N является степенью этого цикла.

Лемма 1. Пусть N — транзитивная нильпотентная подгруппа симметрической группы S_n . Тогда всякий простой делитель порядка группы N является делителем числа n .

Доказательство. Для n простого лемма очевидна. Пусть теперь n составное и пусть для всех чисел, меньших n лемма доказана. Докажем ее справедливость для n . Группа N обладает интранзитивным нормальным делителем (циклическая подгруппа, образованная элементом простого порядка из центра, является одной из интранзитивных инвариантных подгрупп N). По известной теореме N импримитивна. Пусть n символов, перемещаемых N , разбиваются на s систем импримитивности. Ясно, что N можно гомоморфно отобразить на транзитивную группу подстановок $\bar{N}$ степени s . Ядро этого гомоморфизма N_0 состоит из всех подстановок группы N , перемещающих символы внутри систем импримитивности. N_0 содержится в прямом произведении s транзитивных нильпотентных групп степени n/s . По индуктивному предположению, простые делители порядка $\bar{N}$ входят в s , а простые делители порядка N_0 входят в n/s . Этим и доказывается лемма.

Таким образом, n и порядок N имеют одних и тех же простых делителей.

Нильпотентная подгруппа симметрической группы S_n называется максимальной нильпотентной подгруппой S_n , если она не содержится в другой нильпотентной подгруппе S_n .

Лемма 2. Максимальные нильпотентные подгруппы S_{p^r} , где p — простое число, сопряжены в S_{p^r} , ибо все они являются p -подгруппами Силова симметрической группы S_{p^r} .

Доказательство. В силу леммы 1 любая транзитивная нильпотентная подгруппа S_{p^r} является p -группой. Поэтому лемма 2 следует из второй теоремы Силова.

В дальнейшем одну из силовских p -групп симметрической группы S_{p^r} мы будем обозначать через N_{p^r} .

Пусть теперь

$$n = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots p_k^{\nu_k}, \quad (1)$$

где p_j — различные простые числа. Построим одну транзитивную нильпотентную подгруппу симметрической группы S_n , изоморфную прямому произведению k групп $N_{p_1^{\nu_1}}, N_{p_2^{\nu_2}}, \dots, N_{p_k^{\nu_k}}$. Пусть ξ пробегает n символов, перемещаемых группой S_n . ξ запишем в виде

$$\xi = [\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_k],$$

где ξ_j пробегает $p_j^{\nu_j}$ символов. Если теперь φ_j пробегает все подстановки группы $N_{p_j^{\nu_j}}$ то все f_j , где $f_j[\xi] = f_j[\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_k] = [\xi_1, \dots, \varphi_j(\xi_j), \dots, \xi_k]$, образуют группу $N^{(j)}$, изоморфную $N_{p_j^{\nu_j}}$. Положим

$$N_n = N^{(1)} N^{(2)} \dots N^{(k)}. \quad (2)$$

Очевидно, произведение (2) прямое, N_n нильпотентна и транзитивна.

Можно было бы непосредственно показать, что N_n — максимальная нильпотентная подгруппа S_n . Но мы ниже докажем, что любая транзитивная нильпотентная подгруппа S_n сопряжена в S_n с некоторой подгруппой N_n . Отсюда же следует и максимальность N_n и сопряженность всех максимальных нильпотентных транзитивных подгрупп S_n .

Пусть N — транзитивная нильпотентная подгруппа S_n , где $n = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots p_k^{\nu_k}$. В силу леммы 1 порядок группы N имеет вид $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_j \geq \nu_j$. N запишем в виде прямого произведения $N = HF$, где H порядка $p_1^{\alpha_1}$, а F порядка $p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$.

Лемма 3. Перемещаемые группой N символы можно так занумеровать парами чисел $[x, y]$, что для $h \in H$, $f \in F$ $h[x, y] = [\psi(x), y]$, $f[x, y] = [x, \varphi(y)]$, где x пробегает $p_1^{\alpha_1}$ символов, $y - n/p_1^{\alpha_1}$ символов, $\psi(x)$ транзитивно перемещают символы x , а $\varphi(y)$ транзитивно перемещают символы y .

Доказательство. Так как порядок F не делится на n , то F интранзитивна. Системы интранзитивности F являются системами импримитивности N . Пусть s — число этих систем, а r — число символов каждой системы. Так как F содержится в прямом произведении s нильпотентных транзитивных групп степени r , то порядок F и число r имеют одних и тех же простых делителей: $p_2, p_3, \dots, p_k$. Так как N транзитивна, а F оставляет на месте каждую систему импримитивности, то H транзитивно перемещает эти системы. Отсюда следует, что s является делителем порядка H , т. е. $s = p_1^{\beta_1}$, а $r = p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$. Но $sr = n$, откуда $s = p_1^{\nu_1}$, $r = p_2^{\nu_2} \dots p_k^{\nu_k}$.

Покажем теперь, что перемещаемые N символы можно так занумеровать, что любая подстановка f из F будет во всех системах импримитивности индуцировать одну и ту же подстановку степени r .

Действительно, пусть $1, 2, \dots, r$ — символы одной системы импримитивности. Символы любой системы импримитивности можно записать в виде $x_1, x_2, \dots, x_r$, где $x_j = h_x(j)$, $h_x \in H$, $1 \leq j \leq r$. Пусть $f(j) = i_j$, $1 \leq i_j \leq r$, тогда $f(x_j) = hf h^{-1}(x_j) = hf(j) = h(i_j) = x_{i_j}$. Следовательно, если вместо $x_1, x_2, \dots, x_r$ написать $[x, 1], [x, 2], \dots, [x, r]$, то $f[x, y] = [x, \varphi(y)]$, $x = 1, 2, \dots, s$, $y = 1, 2, \dots, r$.

Найдем теперь вид $h[x, y]$. В H есть s подстановок h_x , $x = 1, 2, \dots, s$, таких, что $h_x[1, y] = [x, y]$. Покажем, что для любого

$h \in H$ $h[1, y] = [x, y]$. Пусть $h[1, y] = [x, y_1]$ и $y_1 \neq y$. Тогда $h_x^{-1}h[1, y] = [1, y_1]$. $h_x^{-1}h$ индуцирует в системе $[1, 1], [1, 2], \dots, [1, r]$ некоторую подстановку h_0 . Если теперь F — группа, которую F индуцирует в той же системе, то, очевидно, h_0 перестановочно с каждой подстановкой группы $\bar{F}$. Таким образом, $(h_0)\bar{F}$ — нильпотентная транзитивная группа степени $r = p_2^{y_2} \dots p_k^{y_k}$.

По лемме 1 порядок $(h_0)\bar{F}$ равен $p_2^{y_2} \dots p_k^{y_k}$. С другой стороны, $h_0 \neq e$ — элемент гомоморфного образа некоторой подгруппы H . Следовательно, порядок h_0 равен $p_1^{y_1}$. Это противоречие и доказывает формулу $h[1, y] = [x, y]$. А отсюда уже легко следует, что $h[x, y] = [\psi(x), y]$.

Лемма 3 доказана.

Теорема 1. *Всякая нильпотентная транзитивная подгруппа N симметрической группы S_n сопряжена с некоторой подгруппой группы N_n .*

Доказательство. Пусть $n = p_1^{y_1} \dots p_k^{y_k}$. Для $k = 1$ теорема верна. Пусть $k > 1$ и теорема уже доказана для $k - 1$. $N = HF$. По индуктивному предположению F сопряжена с некоторой подгруппой группы $N_{n/p_1^{y_1}} = N^{(2)}N^{(3)} \dots N^{(k)}$ (см. 2)). $N = HF$ сопряжена с некоторой подгруппой N_n . Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Все транзитивные максимальные нильпотентные подгруппы симметрической группы сопряжены между собой.*

Далее, если $n = p_1^{y_1} p_2^{y_2} \dots p_k^{y_k}$, то транзитивная максимальная нильпотентная подгруппа симметрической группы S_n изоморфна прямому произведению p_j — подгрупп Силова симметрических групп $S_{p_1^{y_1}}, S_{p_2^{y_2}}, \dots, S_{p_k^{y_k}}$.

Как легко вычислить, порядок максимальной транзитивной нильпотентной подгруппы S_n равен

$$p_1^{p_1-1} p_2^{p_2-1} \dots p_k^{p_k-1}, \quad p_j = \frac{p_1^{y_j} - 1}{p_j - 1}.$$

Силовские p -группы N_{p^v} симметрической группы S_{p^v} изучались Л. Калужниным (см., например, (1)).

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
13 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ L. Kaloujnine, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3), 65, 239 (1948).