

Член-корреспондент АН СССР Л. Н. СРЕТЕНСКИЙ

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФОРМЫ ПРЯТЯГИВАЮЩЕГО ТЕЛА ПО ЗНАЧЕНИЯМ ЕГО ВНЕШНЕГО ПОТЕНЦИАЛА

В небольшой заметке, опубликованной в «Докладах Академии наук СССР» (¹), П. С. Новиков показал при помощи чрезвычайно искусных построений, что если два тела, имеющие постоянную плотность и звездные относительно некоторой точки, обладают одинаковым внешним потенциалом, то эти тела полностью совпадают друг с другом. Эта теорема доказывается П. С. Новиковым на основе вспомогательной леммы, утверждающей ортогональность плотности тела нулевого внешнего потенциала ко всякой гармонической функции.

В настоящей заметке мы имеем в виду доказать на основе этой леммы теорему единственности при некоторых новых условиях, касающихся формы тела, и внести вместе с тем одно упрощение в метод доказательства теоремы П. С. Новикова.

Мы будем говорить, что тело обладает средней плоскостью, если существует такая плоскость P , называемая средней плоскостью, что всякая прямая, перпендикулярная к этой плоскости, может пересекать поверхность тела только в двух точках, расположенных по разные стороны от плоскости P .

Рассмотрим два тела C_1 и C_2 одной и той же постоянной плотности; допустим, что каждое из этих тел обладает средней плоскостью, и предположим, кроме того, что центр тяжести каждого из этих двух тел находится внутри своего тела; тогда, при параллельности средних плоскостей этих тел и при равенстве внешних ньютоновских потенциалов обоих тел, эти тела будут полностью совпадать друг с другом.

Для доказательства этой теоремы заметим прежде всего, что центры тяжести обоих тел совпадают друг с другом и массы тел равны между собою, в силу этого поверхности обоих тел пересекаются. Рассмотрим новое тело C , ограниченное кусками поверхностей тел C_1 и C_2 , находящихся вне этих тел. Это новое тело C будет обладать нулевым внешним потенциалом, если тем частям этого тела, которые принадлежат лишь телу C_1 , приписывать плотность 1, а тем частям, которые принадлежат лишь телу C_2 , приписывать плотность -1 , и считать, кроме того, что плотность тела C равна нулю в тех его частях, которые принадлежат одновременно и телу C_1 и телу C_2 .

По указанной лемме плотность δ тела C должна быть ортогональна ко всякой функции, гармонической внутри тела C . Но можно, однако же, построить такую гармоническую функцию, которая не будет ортогональна к плотности тела C нулевого внешнего потенциала.

Проще всего построить гармоническую функцию, неортогональную к плотности δ , можно таким приемом. Определим на поверхности S_1 тела C_1 некоторую функцию f_1 , равную 1 в тех точках поверхности S_1 , которые лежат выше средней плоскости тела C_1 , и равную нулю во всех остальных точках. Определим затем на поверхности S_2 тела C_2 функцию

f_2 , равную нулю в тех точках, которые расположены выше средней плоскости тела C_2 , и равную 1 в тех точках, которые лежат ниже средней плоскости этого тела. Определим теперь на поверхности S тела C функцию f так, что на той части поверхности S , которая принадлежит поверхности S_1 , берется соответствующее значение функции f_1 , принятое на этой части поверхности S_1 , и аналогично для той части поверхности S , которая принадлежит поверхности S_2 .

Решим теперь для тела C задачу Дирихле, беря в качестве граничной функции построенную сейчас функцию f . Пользуясь принципом максимума, примененным к гармонической функции F , решающей эту задачу Дирихле, и рассматривая различные возможные случаи взаимного расположения поверхностей S_1 и S_2 , можно убедиться, что гармоническая функция H , равная частной производной по z от функции F , не ортогональна к плотности δ тела C (координата z измеряется в направлении, перпендикулярном к средним плоскостям тел C_1 и C_2). Этим и доказывается совпадение тел C_1 и C_2 .

При помощи таких же построений, какие изложены выше, можно снова доказать теорему П. С. Новикова и, кроме того, убедиться в тождественности тел, имеющих среднюю сферическую поверхность и обладающих общим внешним ньютоновским потенциалом.

Морской гидрофизический
институт
Академии наук СССР

Поступило
13 VIII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. С. Новиков, ДАН, 18, № 3 (1938).