

Л. Б. НИСНЕВИЧ

О ЧИСЛЕ ТОЧЕК АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ В ПРОСТОМ КОНЕЧНОМ ПОЛЕ

(Представлено академиком П. А. Александровым 11 VI 1954)

Пусть V — абсолютно неприводимое многообразие, заданное системой алгебраических уравнений в n -мерном проективном пространстве. Обозначим через r_V размерность нашего многообразия, а через $N_V(p)$ — число точек его, лежащих в поле вычетов по модулю p .

В этой работе будет доказана следующая теорема:

Теорема 1.

$$|N_V(p) - p^{r_V}| \leq c(m_V, n) p^{r_V - 1/2},$$

где $c(m_V, n)$ зависит только от степени m_V многообразия и от размерности пространства, в котором рассматривается многообразие V .

Эта теорема является обобщением результата А. Вейля ⁽³⁾, относящегося к случаю, когда V — кривая.

Для доказательства теоремы 1 используем следующую теорему:

Теорема 2. Пусть в n -мерном комплексном проективном пространстве P_n задано абсолютно неприводимое алгебраическое многообразие $V(x_0, \dots, x_n)$; W — пересечение этого многообразия с гиперплоскостью $u_0x_0 + \dots + u_nx_n = 0$; P'_n — комплексное проективное пространство $(u_0, \dots, u_n)$.

Тогда для того, чтобы многообразие $W(x_0, \dots, x_n)$ было приводимым, необходимо и достаточно, чтобы точка $(u_0, \dots, u_n)$ лежала на многообразии $V'(u_0, \dots, u_n)$, определяемом многообразием $V(x_0, \dots, x_n)$, причем $V'(u_0, \dots, u_n)$ не содержит всех точек пространства P'_n ⁽²⁾. Пусть q — степень V' . Из доказательства теоремы 2 ⁽²⁾, стр. 79, следует, что $q \leq c_1(m_V)$, где $c_1(m_V)$ — константа, зависящая только от m_V .

По теореме 2 в пространстве P'_n существует точка, не лежащая на многообразии V' . Пусть это будет точка $(1, a_1, \dots, a_n)$. Прямая $u_i = u_0a_i$ ($i \neq k$) проходит через точку $(1, a_1, \dots, a_n)$ и поэтому не лежит в V' . Следовательно, эта прямая пересекает многообразие V' не более чем в q точках. А раз это так, то хотя бы одна из точек $(1, a_1, \dots, a_{k-1}, 0, a_{k+1}, \dots, a_n)$, $(1, a_1, \dots, a_{k-1}, 1, a_{k+1}, \dots, a_n)$, $\dots$, $(1, a_1, \dots, a_{k-1}, q, a_{k+1}, \dots, a_n)$ не лежит на многообразии V' . Придавая k значения от 1 до n , получим, что точка $(1, b_1, \dots, b_n)$, у которой все координаты b_i целые числа меньше $(q+1)$, не принадлежит многообразию $V'(u_0, \dots, u_n)$.

Обозначим через W_i пересечение многообразия $V(x_0, \dots, x_n)$ с гиперплоскостью $x_0 + b_1x_1 + \dots + b_{n-1}x_{n-1} + ix_n = 0$.

Точки $(1, b_1, \dots, b_{n-1}, i)$ (i — любое целое число) лежат на прямой, проходящей через точку $(1, b_1, \dots, b_{n-1}, qn)$. Значит, что следует из

доказанного выше, если $W_{i_1}, \dots, W_{i_k}$ — все приводимые многообразия из W_i -х, то $k \leq q$.

Теперь рассмотрим случай, когда V не лежит в пространстве P_{n-1} . Докажем, что W_i не содержит всех точек гиперплоскости $x_0 + b_1x_1 + \dots + b_{n-1}x_{n-1} + ix_n = 0$. Предположим противное. Тогда: если $F_j(x_0, \dots, x_n) = 0$ — одно из уравнений, определяющих V , то

$$F_j(x_0, \dots, x_n) = (x_0 + b_1x_1 + \dots + b_{n-1}x_{n-1} + ix_n)^{m_j} g_j(x_0, \dots, x_n);$$

если многообразие $g_j = 0$ (для всех j) пусто, то V совпадает с нашей гиперплоскостью; если же это многообразие не пусто, то V приводимо. И то и другое противоречит условию.

1. Значит, W_i — многообразие размерности $r_{W_i} < r_V$ в $(n-1)$ -мерном пространстве.

Пусть S — общая часть многообразий W_i , т. е. S — пересечение V с линейным подпространством L , определяемым системой

$$x_n = 0,$$

$$x_0 + b_1x_1 + \dots + b_{n-1}x_{n-1} = 0.$$

Докажем, что L не лежит на многообразии V .

Предположим противное. По условию L не совпадает с V . Если же W_i содержит какие-нибудь точки V , кроме точек подпространства L , то W_i приводимо (доказывается так же, как I). Следовательно, все точки V лежат на $W_{i_1}, \dots, W_{i_h}$ и, значит, V приводимо, что противоречит условию.

II. Значит, S — многообразие размерности $r_S \leq r_V - 2$ в $(n-2)$ -мерном пространстве.

Докажем теперь следующую теорему:

Теорема 3. Пусть $H(x_0, \dots, x_n)$ — любое алгебраическое многообразие в n -мерном проективном пространстве; R — его размерность; m_H — степень и $N_h(p)$ — число точек H в n -мерном проективном пространстве Π_n относительно поля вычетов по модулю p .

Тогда

$$N_h(p) \leq c(m_H, n)p^h,$$

где $c(m_H, n)$ может зависеть только от m_H и n .

При $h = 0$ теорема очевидна.

Предположим, что теорема 3 верна для многообразий, лежащих в $(n-1)$ -мерном пространстве. Докажем, что она верна для многообразия H . Для этого будем пересекать наше многообразие гиперплоскостями $x_1 = 0, x_1 = x_0, \dots, x_1 = (p-1)x_0$. Заметим, что любая точка пространства Π_n лежит хотя бы в одной из этих гиперплоскостей.

Если в каком-нибудь сечении получилось многообразие размерности h , то, значит, или само многообразие H лежит в этом сечении или в нем лежит одна из компонент H (в случае, если H приводимо).

Если какая-нибудь компонента H входит в пересечение H с подпространством, определяемым уравнениями $x_1 = 0$ и $x_0 = 0$, то будем считать, что она принадлежит только сечению H гиперплоскостью $x_1 = 0$. Заметим, что H может содержать не больше m_H компонент.

Обозначим через $N_{h_i}^i(p)$ число точек сечения H гиперплоскостью $x_1 = ix_0$ в пространстве Π_n ($N_{h_i}^i(p)$ — число точек многообразия H_i в пространстве Π_{n-1} , h_i — размерность H_i).

По предположению индукции

$$N_{h_i}^i(p) \leq c(m_{H_i}, n-1)p^{h_i},$$

причем $m_{H_i} \leq m_H$.

Пусть $c_1(m_H, n) = \max [c(1, n-1), \dots, c(m_H, n-1)]$.

Из доказанного ясно, что

$$\begin{aligned} N_h(p) &\leq \sum_{i=0}^{p-1} N_{h_i}^i(p) \leq c_1(m_H, n) m_H p^h + c_1(m_H, n) p^h = \\ &= [c_1(m_H, n) m_H + c_1(m_H, n)] p^h = c(m_H, n) p^h. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана, так как для пространства размерности 1 она очевидна.

В дальнейшем изложении все ранее введенные многообразия будем рассматривать в n -мерном проективном пространстве относительно поля вычетов по модулю p .

Пусть N_W — число точек многообразия W_i , а N_S — число точек многообразия S . Легко видеть, что

$$N_V = \sum_{i=0}^{p-1} N_{W_i} - (p-1) N_S.$$

Из I и теоремы 3 следует, что

$$N_{W_i} \leq c(m_{W_{ij}}, n-1) p^{r_{V-1}} \quad (j=1, \dots, k).$$

Из II и теоремы 3 следует, что

$$N_S \leq c(m_S, n-2) p^{r_{V-2}}.$$

Заметим, что $m_{W_{ij}} \leq m_V$ и $m_S \leq m_V$.

Предположим, что теорема 1 верна для многообразий размерностей $1, \dots, (n-1)$, находящихся в $(n-1)$ -мерном пространстве. Тогда

$$|N_{W_{ij}} - p^{r_{V-1}}| \leq c(m_{W_{ij}}, n-1) p^{r_{V-1-1/2}} \quad (j=k+1, \dots, p);$$

$$\begin{aligned} |N_V(p) - p^{r_V}| &\leq k p^{r_{V-1}} + \sum_{j=k+1}^p |N_{W_{ij}} - p^{r_{V-1}}| + \sum_{j=1}^k N_{W_{ij}} + (p-1) N_S \leq \\ &\leq q p^{r_{V-1}} + \sum_{j=k+1}^p c(m_{W_{ij}}, n-1) p^{r_{V-1-1/2}} + \\ &+ \sum_{j=1}^k c(m_{W_{ij}}, n-1) p^{r_{V-1}} + c(m_S, n-2) p^{r_{V-2}}. \end{aligned}$$

Обозначим через $c_2(m_V, n)$ максимум чисел $c(i, j)$ для всех i от 1 до m_V и j от 1 до $(n-1)$.

Тогда

$$\begin{aligned} |N_V(p) - p^{r_V}| &\leq c_2(m_V, n) p^{r_{V-1/2}} + [q + q c_2(m_V, n) + c_2(m_V, n)] p^{r_{V-1}} \leq \\ &\leq [c_2(m_V, n) + c_1(m_V) + c_1(m_V) c_2(m_V, n) + c_2(m_V, n)] p^{r_{V-1/2}} = \\ &= c(m_V, n) p^{r_{V-1/2}}, \end{aligned}$$

и теорема 1, так как она верна для одномерных многообразий, доказана.

Из доказанной теоремы, в частности, следует, что для любого абсолютно неприводимого многообразия в пространстве $\Pi(p)$ для всех достаточно больших p найдется точка, лежащая на нем.

Поступило
3 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ A. Weil, Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent, Paris, 1948. ² W. V. D. Hodge, Methods of Algebraic Geometry, 2, 1952.