

УДК 539.4:537.622.4

DOI 10.62595/1819-5245-2026-3-5-18

**РЕШЕНИЕ СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКИ НАГРУЖЕННОГО
ФЕРРОМАГНИТНОГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО
МОНОКРИСТАЛЛА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ,
НАХОДЯЩЕГОСЯ В ЖЕСТКОЙ ЗАДЕЛКЕ, В СЛУЧАЕ
ПОЛИСИНТЕТИЧЕСКОГО ДВОЙНИКОВАНИЯ**

В. О. ОСТРИКОВ

*Учреждение образования «Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого»,
Республика Беларусь*

О. М. ОСТРИКОВ

*Учреждение образования «Белорусский государственный
университет транспорта», г. Гомель*

Рассмотрено использование классических методов механики для решения статической и динамической задач в случае полисинтетического двойникования ферромагнитного кристалла с эффектом памяти формы. При решении статической задачи в случае механически нагруженного ферромагнитного кристалла с памятью формы, находящегося в жесткой заделке и подвергнутого полисинтетическому двойникованию, разработана методика расчета для нахождения неизвестных величин, действующих на границах раздела аустенит/мартенсит.

Ключевые слова: полисинтетический двойник, ферромагнитный кристалл с памятью формы, мартенситная прослойка.

Для цитирования. Остриков, В. О. Решение статической задачи для механически нагруженного ферромагнитного призматического монокристалла с памятью формы, находящегося в жесткой заделке, в случае полисинтетического двойникования / В. О. Остриков, О. М. Остриков // Вестник Гомельского государственного технического университета имени П. О. Сухого. – 2026. – № 3 (106). – С. 5–18. <https://doi.org/10.62595/1819-5245-2026-3-5-18>

**SOLUTION OF THE STATIC PROBLEM
FOR A MECHANICALLY LOADED, RIGIDLY CLAMPED,
FERROMAGNETIC PRISMATIC SHAPE-MEMORY
SINGLE CRYSTAL UNDERGOING POLYSYNTHETIC
TWINNING**

V. O. OSTRIKOV

*Sukhoi State Technical University of Gomel,
the Republic of Belarus*

O. M. OSTRIKOV

Belarusian State University of Transport, Gomel

The article examines the use of classical mechanics methods to solve static and dynamic problems while the polysynthetic twinning of a ferromagnetic shape-memory crystal. To solve the static problem-specifically regarding a mechanically loaded, rigidly clamped ferromagnetic shape-memory crystal undergoing

polysynthetic twinning-a calculation procedure has been developed to determine the unknown quantities acting at the austenite/martensite interfaces.

Keywords: polysynthetic twin, ferromagnetic shape-memory single crystal, martensitic interlayer.

For citation. Ostrikov V. O., Ostrikov O. M. Solution of the static problem for a mechanically loaded, rigidly clamped, ferromagnetic prismatic shape-memory single crystal undergoing polysynthetic twinning. *Vestnik Gomel'skogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta imeni P. O. Sukhogo*, 2026, no. 3 (106), pp. 5–18 (in Russian). <https://doi.org/10.62595/1819-5245-2026-3-5-18>

Сплав Гейслера Ni–Mn–Ga, благодаря своим уникальным свойствам, может быть использован для создания быстродействующих приводов с большим ходом [1–3].

При испытании Ni–Mn–Ga, выступающего в качестве рабочего элемента двухтактных и пружинных приводов [2], было получено, что напряжения, вызванные действием магнитного поля, составляют от 0,1 до 2 МПа в диапазоне деформации до 6 %.

Каждый из рассмотренных приводов обладает конструктивными особенностями и принципом действия. Так, двухтактный привод состоит из двух ферромагнитных кристаллов с памятью формы, взаимодействующих между собой, что позволяет совершать двунаправленные движения. А в пружинных приводах пружина обеспечивает восстанавливающее напряжение, но, в отличие от двухтактного привода, требует затраты мощности для поддержания деформированного состояния кристалла [2].

В работах [4–9] используются классические методы механики для определения технологических параметров ферромагнитного кристалла с памятью формы, направленные на исследование воздействия магнитного поля и внешних механических нагрузок на границы раздела аустенит/мартенсит.

Цель работы – решить статическую задачу для находящегося в жесткой заделке ферромагнитного призматического кристалла с эффектом памяти формы, подвергнутого полисинтетическому двойникованию, и показать влияние внешней сжимающей нагрузки на возникновение сил на границах раздела аустенит/мартенсит.

Постановка задачи

На рис. 1 схематически изображен подвергнутый полисинтетическому двойникованию механически нагруженный призматический ферромагнитный кристалл с эффектом памяти формы, находящийся в жесткой заделке.

Кристалл состоит из 1, 3, ..., 2n-1 аустенитных частей и из 2, 4, ..., 2n-2 мартенситных прослоек. Аустенитная часть длиной $l_{a(1)}$ находится в жесткой заделке, а на торец аустенитной части длиной $l_{a(2n-1)}$ действует заданная сила $\vec{F}$.

Вдоль границ раздела аустенит/мартенсит действуют сдвиговые силы $\vec{F}_{\tau_{A_i}}$, которые необходимо определить. Силы $\vec{F}_{A_i}$ на границах раздела аустенит/мартенсит, возникающие в результате действия внешней силы $\vec{F}$, к оси AX ориентированы под углом α , а к оси A_iX' – под углом β . Силы $\vec{F}_{A_i}$ можно разложить на составляющие: $\vec{X}'_{A_i}$ и $\vec{Y}'_{A_i}$ по отношению к системе координат A_iX' и A_iY' , $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$ по отношению к системе координат A_iX и A_iY .

Искомые силы $\vec{F}_{\tau_{A_i}}$ с силами $\vec{F}_{A_i}$ связаны соотношением

$$\vec{F}_{\tau_{A_i}} = \vec{F}_{A_i} \cos \tau. \quad (1)$$

На выноске (рис. 1) показана промежуточная часть ферромагнитного кристалла с памятью формы, представляющая собой звено $A_{i+2}-A_{i+1}-A_i-A_{i-1}$ и расположенная между границами раздела аустенит/мартенсит, обозначенными точками A_5 и A_{2n-5} (рис. 1).

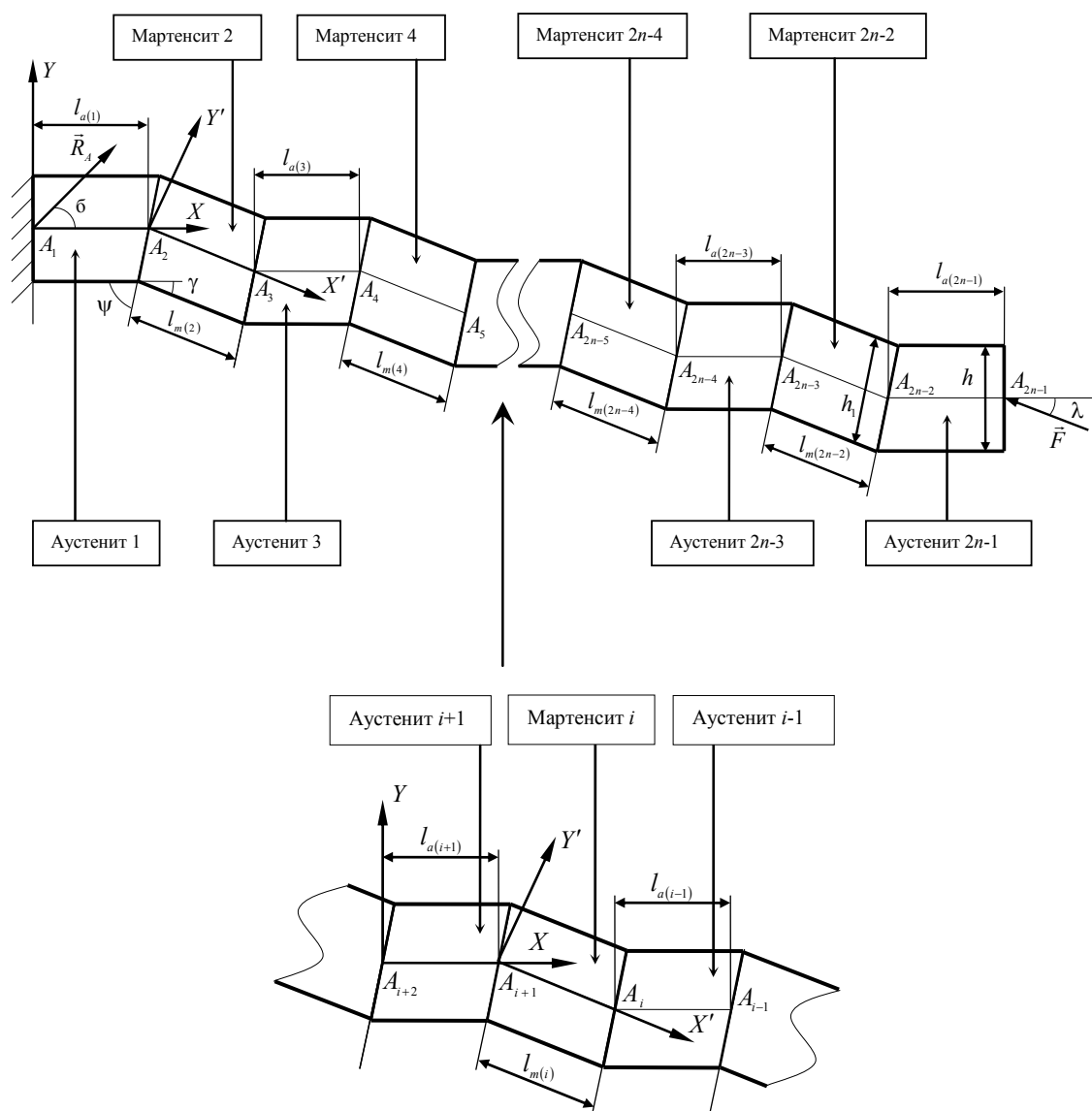


Рис. 1. Схематическое изображение находящегося в жесткой заделке механически нагруженного ферромагнитного кристалла с памятью формы, подвергнутого полисинтетическому двойникованию

Решение задачи

На рис. 2 представлена расчетная схема для звена $A_{2n-3}-A_{2n-2}-A_{2n-1}$ призматического ферромагнитного кристалла с эффектом памяти формы, подвергнутого полисинтетическому двойникованию. Сила $\vec{F}$, действующая на торец образца под углом λ , приводит к возникновению сил $\vec{F}_{A(2n-3)}$ и $\vec{F}_{A(2n-2)}$ на границах раздела аустенит/мартенсит, имеющих составляющие $\vec{F}_{\tau A(2n-3)}$ и $\vec{F}_{\tau A(2n-2)}$, действующие вдоль границ раздела аустенит/мартенсит. Мартенситная прослойка ориентирована под углом γ к поверхности кристалла, а границы раздела аустенит/мартенсит – под углом ψ (рис. 1).

1. На первом этапе решения статической задачи составим систему сил и моментов сил для аустенитного объема длиной $l_{a(2n-1)}$ (рис. 2) звена $A_{2n-3}-A_{2n-2}-A_{2n-1}$, к торцу которого приложена сила $\vec{F}$:

$$\sum_i F_{iX} = X_{A(2n-2)} - X_{A(2n-1)} = 0; \quad (2)$$

$$\sum_i F_{iY} = Y_{A(2n-2)} + Y_{A(2n-1)} = 0; \quad (3)$$

$$\sum_i M_{A(2n-2)}(F_i) = Y_{A(2n-1)} l_{a(2n-1)} + M_{A(2n-2)} = 0, \quad (4)$$

где $X_{A(2n-1)}$ и $Y_{A(2n-1)}$ – проекции соответственно на ось $A_{2n-2}X$ и $A_{2n-2}Y$ силы $\vec{F}$, действующей на торец в точке A_{2n-1} ; $X_{A(2n-2)}$ и $Y_{A(2n-2)}$ – проекции соответственно на ось $A_{2n-2}X$ и $A_{2n-2}Y$ силы $\vec{F}_{A(2n-2)}$, возникающей на границе раздела аустенит/мартенсит A_{2n-2} .

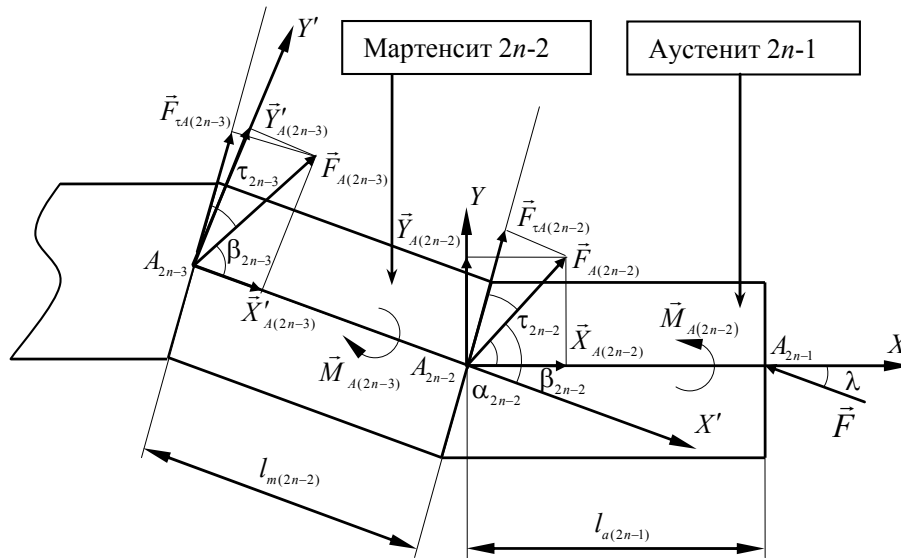


Рис. 2. Схематическое изображение звена ($A_{2n-3}-A_{2n-2}-A_{2n-1}$) нагруженного ферромагнитного кристалла с эффектом памяти формы, подвергнутого полисинтетическому двойникованию

В уравнениях (2)–(4) выполнены замены:

$$\begin{aligned} X_{A(2n-2)} &= F_{A(2n-2)} \cdot \cos \alpha_{2n-2}; \quad Y_{A(2n-2)} = F_{A(2n-2)} \cdot \sin \alpha_{2n-2}; \\ X_{A(2n-1)} &= F \cos \lambda; \quad Y_{A(2n-1)} = F \sin \lambda. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (2), (3) получим:

$$X_{A(2n-2)} = X_{A(2n-1)}; \quad (6)$$

$$Y_{A(2n-2)} = -Y_{A(2n-1)}; \quad (7)$$

а из (4) будем иметь:

$$M_{A(2n-2)} = -Y_{A(2n-1)} l_{a(2n-1)}. \quad (8)$$

Далее составим систему сил и моментов сил для мартенситного объема длиной $l_{m(2n-2)}$ звена $(A_{2n-3}-A_{2n-2}-A_{2n-1})$ (рис. 2), для которого в состоянии равновесия будем иметь:

$$\sum_i F'_{iX} = X'_{A(2n-3)} + X'_{A(2n-2)} = 0; \quad (9)$$

$$\sum_i F'_{iY} = Y'_{A(2n-3)} + Y'_{A(2n-2)} = 0; \quad (10)$$

$$\sum_i M_{A(2n-3)}(F_i) = -Y'_{A(2n-2)} l_{m(2n-2)} - M_{A(2n-3)} + M_{A(2n-2)} = 0, \quad (11)$$

где $X'_{A(2n-2)}$ и $Y'_{A(2n-2)}$ – проекции соответственно на ось $A_{2n-3}X'$ и $A_{2n-3}Y'$ силы $\vec{F}_{A(2n-2)}$, возникающей на границе раздела аустенит/мартенсит A_{2n-2} ; $X'_{A(2n-3)}$ и $Y'_{A(2n-3)}$ – проекции соответственно на ось $A_{2n-3}X'$ и $A_{2n-3}Y'$ силы $\vec{F}_{A(2n-3)}$, возникающей на границе раздела аустенит/мартенсит A_{2n-3} .

В уравнениях (9)–(11) выполнены замены:

$$\begin{aligned} X'_{A(2n-3)} &= F_{A(2n-3)} \cdot \cos \beta_{2n-3}; \quad X'_{A(2n-2)} = F_{A(2n-2)} \cdot \cos \beta_{2n-2}; \\ Y'_{A(2n-3)} &= F_{A(2n-3)} \cdot \sin \beta_{2n-3}; \quad Y'_{A(2n-2)} = F_{A(2n-2)} \cdot \sin \beta_{2n-2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из (9) и (10) получим:

$$X'_{A(2n-3)} = -X'_{A(2n-2)}; \quad (13)$$

$$Y'_{A(2n-3)} = -Y'_{A(2n-2)}, \quad (14)$$

а из (11), с учетом (8), получим:

$$M_{A(2n-3)} = -Y'_{A(2n-2)} l_{m(2n-2)} - Y_{A(2n-1)} l_{a(2n-1)}. \quad (15)$$

2. Рассмотрим промежуточную часть ферромагнитного кристалла с памятью формы, расположенную между границами раздела аустенит/мартенсит и обозначенную точками A_5 , A_{2n-5} (выноски на рис. 1).

Для аустенитного объема длиной $l_{a(i-1)}$ звена $A_{i+1}-A_i-A_{i-1}$ (рис. 3) система сил и моментов сил будет иметь вид:

$$\sum_i F_{iX} = X_{A(i)} + X_{A(i-1)} = 0; \quad (16)$$

$$\sum_i F_{iY} = Y_{A(i)} + Y_{A(i-1)} = 0; \quad (17)$$

$$\sum_i M_{A(i)}(F_i) = Y_{A(i-1)} l_{a(i-1)} + M_{A(i)} = 0, \quad (18)$$

где $X_{A(i-1)}$ и $Y_{A(i-1)}$ – проекции соответственно на ось A_iX и A_iY силы $\vec{F}_{A(i-1)}$, возникающей на границе раздела аустенит/мартенсит A_{i-1} ; $X_{A(i)}$ и $Y_{A(i)}$ – проекции соответственно на ось A_iX и A_iY силы $\vec{F}_{A(i)}$, возникающей на соответствующей границе раздела аустенит/мартенсит.

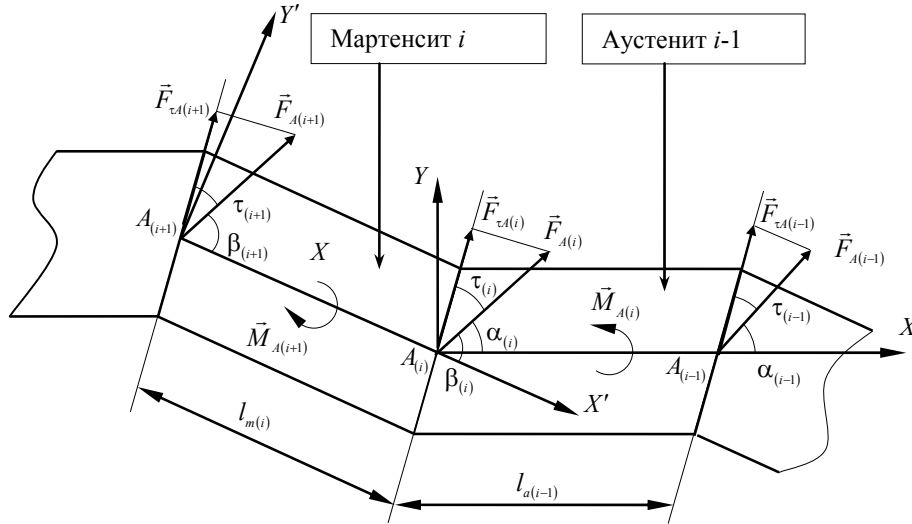


Рис. 3. Схематическое изображение звена $A_{i+1}-A_i-A_{i-1}$ промежуточной части ферромагнитного кристалла с памятью формы, подвергнутого полисинтетическому двойникованию

В уравнениях (16)–(18) выполнены замены:

$$X_{A(i)} = F_{A(i)} \cdot \cos \alpha_i; \quad Y_{A(i)} = F_{A(i)} \cdot \sin \alpha_i;$$

$$X_{A(i-1)} = F_{A(i-1)} \cdot \cos \alpha_{i-1}; \quad Y_{A(i-1)} = F_{A(i-1)} \cdot \sin \alpha_{i-1}. \quad (19)$$

Из (16) и (17) получим:

$$X_{A(i)} = -X_{A(i-1)}; \quad (20)$$

$$Y_{A(i)} = -Y_{A(i-1)}, \quad (21)$$

а из (18) получим:

$$M_{A(i)} = -Y_{A(i-1)} l_{a(i-1)}. \quad (22)$$

Система сил и моментов сил для мартенситного объема длиной $l_{m(i)}$ (рис. 3):

$$\sum_i F'_{iX} = X'_{A(i+1)} + X'_{A(i)} = 0; \quad (23)$$

$$\sum_i F'_{iY} = Y'_{A(i+1)} + Y'_{A(i)} = 0; \quad (24)$$

$$\sum_i M_{A(i+1)}(F_i) = -Y'_{A(i)} l_{m(i)} - M_{A(i+1)} + M_{A(i)} = 0, \quad (25)$$

где $X'_{A(i)}$ и $Y'_{A(i)}$ – проекции соответственно на ось $A_{i+1}X'$ и $A_{i+1}Y'$ силы $\vec{F}_{A(i)}$, действующей на границе раздела аустенит/мартенсит A_i ; $X'_{A(i+1)}$ и $Y'_{A(i+1)}$ – проекции соответственно на ось $A_{i+1}X'$ и $A_{i+1}Y'$ силы $\vec{F}_{A(i+1)}$, возникающей на границе раздела аустенит/мартенсит A_{i+1} .

В уравнениях (23)–(25) выполнены замены:

$$\begin{aligned} X'_{A(i+1)} &= F_{A(i+1)} \cdot \cos \beta_{i+1}; & X'_{A(i)} &= F_{A(i)} \cdot \cos \beta_i; \\ Y'_{A(i+1)} &= F_{A(i+1)} \cdot \sin \beta_{i+1}; & Y'_{A(i)} &= F_{A(i)} \cdot \sin \beta_i. \end{aligned} \quad (26)$$

Из (23) и (24) получим:

$$X'_{A(i+1)} = -X'_{A(i)}; \quad (27)$$

$$Y'_{A(i+1)} = -Y'_{A(i)}, \quad (28)$$

а из (25), с учетом (22), получим:

$$M_{A(i+1)} = -Y'_{A(i)} l_{m(i)} - Y_{A(i-1)} l_{a(i-1)}. \quad (29)$$

3. При рассмотрении звена $A_{i+2}-A_{i+1}-A_i$ (рис. 4) видно, что достаточным является рассмотрение системы сил и их моментов для аустенитного объема длиной $l_{a(i+1)}$, так как система сил и моментов сил для мартенситной прослойки длиной $l_{m(i)}$ рассмотрена ранее для звена $A_{i+1}-A_i-A_{i-1}$ (рис. 3).

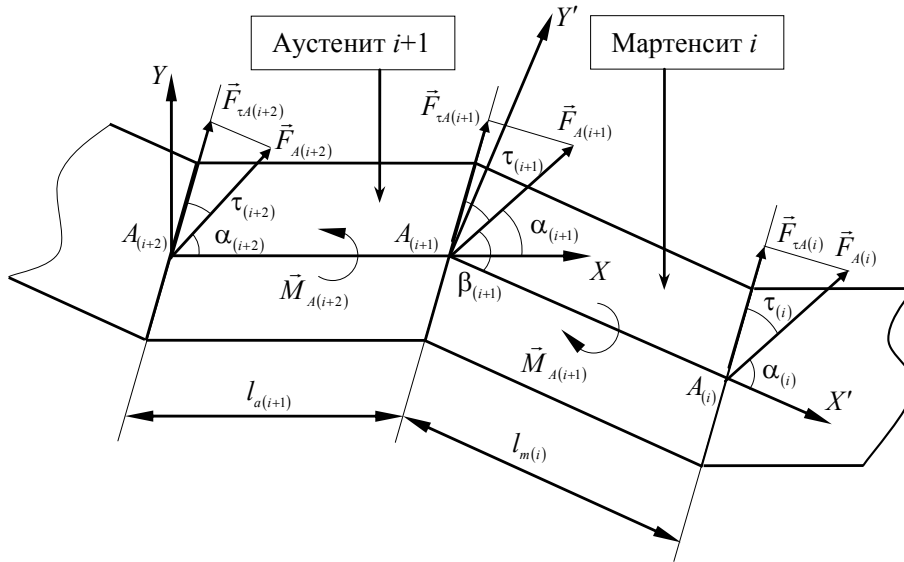


Рис. 4. Схематическое изображение звена $A_{i+2}-A_{i+1}-A_i$ промежуточной части ферромагнитного кристалла с памятью формы, подвергнутого полисинтетическому двойникованию

Для аустенитного объема длиной $l_{a(i+1)}$ будем иметь:

$$\sum_i F_{iX} = X_{A(i+2)} + X_{A(i+1)} = 0; \quad (30)$$

$$\sum_i F_{iY} = Y_{A(i+2)} + Y_{A(i+1)} = 0; \quad (31)$$

$$\sum_i M_{A(i+2)}(F_i) = Y_{A(i+1)} l_{a(i+1)} + M_{A(i+2)} - M_{A(i+1)} = 0, \quad (32)$$

где $X_{A(i+1)}$ и $Y_{A(i+1)}$ – проекции соответственно на ось $A_{i+2}X$ и $A_{i+2}Y$ силы $\vec{F}_{A(i+1)}$, возникающей на границе раздела аустенит/мартенсит A_{i+1} ; $X_{A(i+2)}$ и $Y_{A(i+2)}$ – проекции соответственно на ось $A_{i+2}X$ и $A_{i+2}Y$ силы $\vec{F}_{A(i+2)}$, возникающей на соответствующей границе раздела аустенит/мартенсит.

В уравнениях (30)–(32) выполнены замены:

$$\begin{aligned} X_{A(i+2)} &= F_{A(i+2)} \cdot \cos \alpha_{i+2}; \quad Y_{A(i+2)} = F_{A(i+2)} \cdot \sin \alpha_{i+2}; \\ X_{A(i+1)} &= F_{A(i+1)} \cdot \cos \alpha_{i+1}; \quad Y_{A(i+1)} = F_{A(i+1)} \cdot \sin \alpha_{i+1}. \end{aligned} \quad (33)$$

Из (30) и (31) получим:

$$X_{A(i+2)} = -X_{A(i+1)}; \quad (34)$$

$$Y_{A(i+2)} = -Y_{A(i+1)}, \quad (35)$$

а из (32), с учетом (29) получим:

$$M_{A(i+2)} = -Y_{A(i+1)} l_{a(i+1)} + Y'_{A(i)} l_{m(i)} + Y_{A(i-1)} l_{a(i-1)}. \quad (36)$$

4. На рис. 5 представлено звено $A_1-A_2-A_3$, на котором действие силы $\vec{F}$ вызывает возникновение реакции заделки $\vec{R}_A$, действующей под углом α_1 , а также сил $\vec{F}_A$ на границах раздела аустенит/мартенсит.

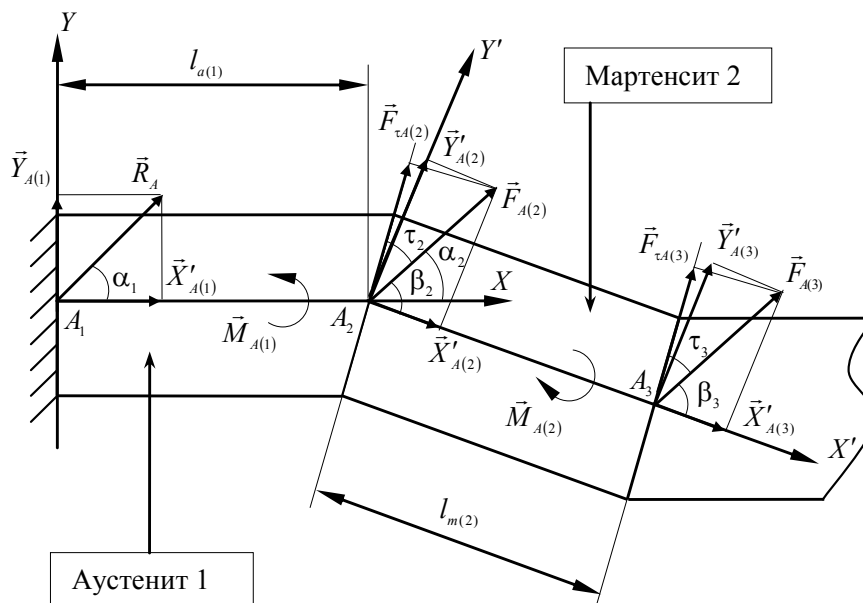


Рис. 5. Звено $A_1-A_2-A_3$ ферромагнитного полисинтетического монокристалла с эффектом памяти формы, находящегося в жесткой заделке

Система сил и моментов сил, действующих на мартенситной прослойке длиной $l_{m(2)}$ звена $A_1-A_2-A_3$ ферромагнитного кристалла с эффектом памяти формы, подвергнутого полисинтетическому двойникованию, будет иметь вид:

$$\sum_i F'_{iX} = X'_{A(2)} + X'_{A(3)} = 0; \quad (37)$$

$$\sum_i F'_{iY} = Y'_{A(2)} + Y'_{A(3)} = 0; \quad (38)$$

$$\sum_i M_{A(2)}(F_i) = -Y'_{A(3)} l_{m(2)} - M_{A(2)} = 0, \quad (39)$$

где $X'_{A(3)}$ и $Y'_{A(3)}$ — проекции соответственно на ось A_2X' и A_2Y' силы $\vec{F}_{A(3)}$, действующей на границе раздела аустенит/мартенсит A_3 ; $X'_{A(2)}$ и $Y'_{A(2)}$ — проекции соответственно на ось A_2X' и A_2Y' силы $\vec{F}_{A(2)}$, возникающей на границе раздела аустенит/мартенсит A_2 .

В уравнениях (37)–(39) выполнены замены:

$$\begin{aligned} X'_{A(2)} &= F_{A(2)} \cdot \cos \beta_2; \quad X'_{A(3)} = F_{A(2)} \cdot \cos \beta_2; \\ Y'_{A(3)} &= F_{A(3)} \cdot \sin \beta_3; \quad Y'_{A(3)} = F_{A(3)} \cdot \sin \beta_3. \end{aligned} \quad (40)$$

Из (37) и (38) получим:

$$X'_{A(2)} = -X'_{A(3)}; \quad (41)$$

$$Y'_{A(2)} = -Y'_{A(3)}, \quad (42)$$

а из (39) получим:

$$M_{A(2)} = -Y'_{A(3)} l_{m(2)}. \quad (43)$$

Для аустенитного объема длиной $l_{a(1)}$ звена $A_1-A_2-A_3$ (рис. 5), находящегося в жесткой заделке, система сил и моментов сил:

$$\sum_i F_{iX} = X_{A(2)} + X_{A(1)} = 0; \quad (44)$$

$$\sum_i F_{iY} = Y_{A(2)} + Y_{A(1)} = 0; \quad (45)$$

$$\sum_i M_{A(1)}(F_i) = Y_{A(2)} l_{a(1)} + M_{A(1)} - M_{A(2)} = 0, \quad (46)$$

где $X_{A(2)}$ и $Y_{A(2)}$ — проекции соответственно на ось A_1X и A_1Y силы $\vec{F}_{A(2)}$, возникающей на границе раздела аустенит/мартенсит A_2 ; $X_{A(1)}$ и $Y_{A(1)}$ — проекции соответственно на ось A_1X и A_1Y силы $\vec{F}_{A(1)}$, возникающей на соответствующей границе раздела аустенит/мартенсит.

В уравнениях (44)–(46) выполнены замены:

$$\begin{aligned} X_{A(2)} &= F_{A(2)} \cdot \cos \alpha_2; \quad Y_{A(2)} = F_{A(2)} \cdot \sin \alpha_2; \\ X_{A(1)} &= R_A \cdot \cos \alpha_{(1)}; \quad Y_{A(1)} = R_A \cdot \sin \alpha_1. \end{aligned} \quad (47)$$

Из (44) и (45) получим:

$$X_{A(1)} = -X_{A(2)}; \quad (48)$$

$$X_{A(1)} = -Y_{A(2)}, \quad (49)$$

а из (46), с учетом (43), получим:

$$M_{A(1)} = -Y_{A(2)}l_{a(1)} - Y'_{A(3)}l_{m(2)} - Y_{A(4)}l_{a(3)} - Y'_{A(5)}l_{m(4)} = 0. \quad (50)$$

Результаты расчетов и их обсуждение

Для численных расчетов введем исходные данные. Примем начальное и конечное звенья ферромагнитного кристалла с памятью формы, подвергнутого полисинтетическому двойникованию, аустенитными. Тогда число звеньев всего образца будет нечетным. Пусть общее число звеньев $N = 11$. Длины крайних аустенитных объемов примем $l_{a1} = l_{a11} = 1,56$ мм, а длины внутренних аустенитных объемов – $l_{a3} = l_{a5} = l_{a7} = l_{a9} = 0,5$ мм. Длины мартенситных прослоек примем $l_{a2} = l_{a4} = l_{a6} = l_{a8} = l_{a10} = 0,47$ мм. Высота аустенитного объема пусть будет равна $h = 3,58$ мм (рис. 1), а толщина образца – $b = 2,77$ мм [10]. Высота мартенситной прослойки h_1 рассчитывается с использованием полученного в работе [11] параметра кристаллической решетки $c/a = 0,94$ по формуле

$$h_1 = h \frac{a}{c} = 3,37 \text{ мм}. \quad (51)$$

Угол поворота границ раздела аустенит/мартенсит к поверхности кристалла ψ и угол поворота мартенситной прослойки относительно поверхности кристалла γ (рис. 1) рассчитаем по формулам [11]:

$$\psi = \arctan\left(\frac{c}{a}\right) = 43,23^\circ; \quad (52)$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - 2\psi = 3,54^\circ. \quad (53)$$

Полученные углы позволяют определить, под какими углами ориентированы силы, возникающие в результате внешней силы $\vec{F}$, действующей под углом $\lambda = 20^\circ$ к поверхности торца образца.

Силы $\vec{F}_{A_i}$ по отношению к оси AX ориентированы под углами α_i , а по отношению к оси AX' – под углами β_i . Сдвиговые силы $\vec{F}_{\tau_{A_i}}$, действующие вдоль границы раздела аустенит/мартенсит, ориентированы под углом τ по отношению к силам $\vec{F}_{A_i}$. Таким

образом, при заданных $N=11$ звеньях будем иметь 10 границ раздела аустенит/мартенсит. Тогда:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = \alpha_9 = \alpha_{10} = \alpha_{11} = \alpha_{12} = 20^\circ, \quad (54)$$

где α_1 – угол, под которым ориентирована реакция жесткой заделки $\vec{R}_A$ относительно оси A_1X ;

$$\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = \beta_7 = \beta_8 = \beta_9 = \beta_{10} = \beta_{11} = 70,32^\circ; \quad (55)$$

$$\tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \tau_5 = \tau_6 = \tau_7 = \tau_8 = \tau_9 = \tau_{10} = \tau_{11} = 23,23^\circ. \quad (56)$$

Как отмечалось в работе [10], для предварительно растянутого до 6 % кристалла $\text{Ni}_{51,6}\text{--Mn}_{26,3}\text{--Ga}_{22}$ размерами $6,63 \times 2,77 \times 3,58$ мм при отсутствии магнитного поля наблюдается сжатие без увеличения деформации до достижения напряжения двойникования. Дальнейшее сжатие путем увеличения внешнего напряжения от 0,23 до 0,27 МПа приводит к деформации в диапазоне от 0,5 до 6 %.

В случае полисинтетического двойникования ферромагнитного кристалла с памятью формы рассмотрим диапазон деформации от 2 до 5 % и выполним расчет для заданного внешнего напряжения $\sigma = 0,25$ МПа $= 2,5 \cdot 10^5$ Па, входящего в рассмотренный в [10] диапазон напряжений.

Для нахождения величины силы $\vec{F}$, действующей на торец образца (рис. 1), воспользуемся уравнением [12]:

$$F = \sigma S, \quad (57)$$

где S – площадь незакрепленного торца аустенитного объема, которая в нашем случае равна:

$$S = hb = 2,77 \text{ мм} \cdot 3,58 \text{ мм} = 9,9 \text{ мм}^2 \approx 10 \text{ мм}^2 = 10^{-5} \text{ м}^2. \quad (58)$$

Тогда из (57) получим:

$$F = 2,5 \cdot 10^5 \cdot 10^{-5} = 2,5 \text{ Н}. \quad (59)$$

Из расчетов получим, что силы $\vec{F}_{A_i}$, возникающие на границах раздела аустенит/мартенсит, равны:

$$|\vec{F}_{A1}| = |\vec{F}_{A2}| = |\vec{F}_{A3}| = |\vec{F}_{A4}| = |\vec{F}_{A5}| = |\vec{F}_{A6}| = |\vec{F}_{A7}| = |\vec{F}_{A8}| = |\vec{F}_{A9}| = |\vec{F}_{A10}| = |\vec{F}_{A11}| = |\vec{F}| = 2,5 \text{ Н}. \quad (60)$$

Используя соотношение (1) и (59), определим силы $\vec{F}_{\tau A_i}$, действующие вдоль границ раздела аустенит/мартенсит:

$$F_{\tau A_i} = F_{A_i} \cos \tau = 2,5 \cdot \cos 23,23^\circ = 2,3 \text{ Н}. \quad (61)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\vec{F}_{\tau A(2)}| &= |\vec{F}_{\tau A(3)}| = |\vec{F}_{\tau A(4)}| = |\vec{F}_{\tau A(5)}| = |\vec{F}_{\tau A(6)}| = \\ &= |\vec{F}_{\tau A(7)}| = |\vec{F}_{\tau A(8)}| = |\vec{F}_{\tau A(9)}| = |\vec{F}_{\tau A(10)}| = |\vec{F}_{\tau A(11)}| = 2,3 \text{ Н}. \end{aligned} \quad (62)$$

Расчеты показали, что для ферромагнитного кристалла с памятью формы, состоящего из $N=11$ прослоек аустенита и мартенсита, значения моментов сил для каждого звена будут равны:

$$\begin{aligned}
 M_{A11} &= -F \cdot \sin \lambda \cdot l_{11} = -3,67 \text{ Н} \cdot \text{мм}; \\
 M_{A10} &= -F_{A11} \cdot \sin \beta_{11} \cdot l_{10} + M_{A11} = -4,78 \text{ Н} \cdot \text{мм}; \\
 M_{A9} &= -F_{A10} \cdot \sin \beta_{10} \cdot l_9 + M_{A10} = -5,96 \text{ Н} \cdot \text{мм}; \\
 M_{A8} &= -F_{A9} \cdot \sin \beta_9 \cdot l_8 + M_{A9} = -7,06 \text{ Н} \cdot \text{мм}; \\
 M_{A7} &= -F_{A8} \cdot \sin \beta_8 \cdot l_7 + M_{A8} = -8,23 \text{ Н} \cdot \text{мм}; \\
 M_{A6} &= -F_{A7} \cdot \sin \beta_7 \cdot l_6 + M_{A7} = -9,35 \text{ Н} \cdot \text{мм}; \\
 M_{A5} &= -F_{A6} \cdot \sin \beta_6 \cdot l_5 + M_{A6} = -10,5 \text{ Н} \cdot \text{мм}; \\
 M_{A4} &= -F_{A5} \cdot \sin \beta_5 \cdot l_4 + M_{A5} = -11,6 \text{ Н} \cdot \text{мм}; \\
 M_{A3} &= -F_{A4} \cdot \sin \beta_4 \cdot l_3 + M_{A4} = -12,8 \text{ Н} \cdot \text{мм}; \\
 M_{A2} &= -F_{A3} \cdot \sin \beta_3 \cdot l_2 + M_{A3} = -13,9 \text{ Н} \cdot \text{мм}; \\
 M_{A1} &= -F_{A2} \cdot \sin \beta_2 \cdot l_1 + M_{A2} = -17,6 \text{ Н} \cdot \text{мм}.
 \end{aligned} \tag{63}$$

Заключение

Таким образом, при решении статической задачи для подвергнутого полисинтетическому двойникованию жестко закрепленного в заделке ферромагнитного кристалла с памятью формы показано влияние внешней сжимающей нагрузки на силы, возникающие на границах раздела аустенит/мартенсит. Произведен расчет для состоящего из $N=11$ аустенитных и мартенситных прослоек кристалла $\text{Ni}_{51,6}\text{--Mn}_{26,3}\text{--Ga}_{22}$ с известными геометрическими размерами. Применение экспериментальных данных, позволило рассчитать величины сил, возникающих на границах раздела и величины моментов сил для каждого звена кристалла.

Литература

1. Marioni, M. Pulsed magnetic field-induced actuation of Ni–Mn–Ga single crystals / M. Marioni, R. C. O’Handley, S. M. Allen // *Applied Physics Letters*. – 2003. – Vol. 83. – P. 3966–3968.
2. Schlüter, K. Principle Design of Actuators Driven by Magnetic Shape Memory Alloys / K. Schlüter, B. Holz, A. Raatz // *Advanced Engineering Materials*. – 2012. – Vol. 14. – P. 682–686.
3. Smith, A. R. Rapid actuation and response of Ni–Mn–Ga to magnetic-field-induced stress / A. R. Smith, J. Tellinen, K. Ullakko // *Acta Materialia*. – Vol. 80. – P. 373–379.
4. Остриков В. О. Статика и динамика границы раздела аустенит/мартенсит в нагруженном призматическом монокристалле с эффектом памяти формы, находящемся в жесткой заделке / В. О. Остриков, О. М. Остриков // *Машиностроение : респ. межвед. сб. науч. тр. / Белорус. нац. техн. ун-т ; гл. ред. В. К. Шелег. – Минск : БНТУ, 2021. – Вып. 33. – С. 139–147.*
5. Остриков, В. О. Статическая и динамическая задача для единичной мартенситной прослойки в ферромагнитном монокристалле с эффектом памяти формы, находящемся в магнитном поле в жесткой заделке / В. О. Остриков, О. М. Остриков // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2023. – № 1 (54). – С. 43–46.

6. Василевич, Ю. В. Статика и динамика границы раздела аустенит/мартенсит в призматическом ферромагнитном монокристалле с эффектом памяти формы, находящемся в жесткой заделке и магнитном поле / Ю. В. Василевич, В. О. Остриков, О. М. Остриков // Машиностроение : респ. межвед. сб. науч. тр. / Белорус. нац. техн. ун-т ; редкол.: В. К. Шелег (гл. ред.) [и др.]. – Минск : БНТУ, 2023. – Вып. 34. – С. 131–139.
7. Василевич, Ю. В. Статика и динамика границ раздела аустенит / мартенсит мартенситной прослойки в нагруженном призматическом ферромагнитном монокристалле с эффектом памяти формы, находящемся в жесткой заделке / Ю. В. Василевич, В. О. Остриков, О. М. Остриков // Машиностроение : респ. межвед. сб. науч. тр. / Белорус. нац. техн. ун-т ; редкол.: В. К. Шелег (гл. ред.) [и др.]. – Минск : БНТУ, 2023. – Вып. 34. – С. 139–146.
8. Остриков, В. О. Расчет сил, действующих на непараллельных границах раздела аустенит/мартенсит в ферромагнитном монокристалле с памятью формы, находящемся в жесткой заделке / В. О. Остриков, О. М. Остриков // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. Естественные науки. – 2024. – № 3 (144). – С. 116–121.
9. Василевич, Ю. В. Статическая задача механики для границ раздела мартенситной прослойки в случае одноосного растяжения/сжатия ферромагнитного кристалла с эффектом памяти формы / Ю. В. Василевич, В. О. Остриков, О. М. Остриков // Машиностроение : респ. межвед. сб. науч. тр. / Белорус. нац. техн. ун-т ; редкол.: В. К. Шелег (гл. ред.) [и др.]. – Минск : БНТУ, 2025. – Вып. 36. – С. 173–183.
10. Lindquist, P. G. Working Ni–Mn–Ga Single Crystals in a Magnetic Field Against a Spring Load / P. G. Lindquist, P. Müllner // Shape Memory and Superelasticity. – 2015. – Vol. 1. – P. 69–77.
11. Malla, A. Effect of composition of the magnetic and elastic properties of shape memory Ni–Mn–Ga: Master's thesis / A. Malla. – Ohio State University, 2003. – 191 p.
12. Бегун, П. И. Прикладная механика : учебник / П. И. Бегун, О. П. Кормилицын. – СПб. : Политехника, 2006. – 463 с.

References

1. Marioni M., O'Handley R. C., Allen S. M. Pulsed magnetic field-induced actuation of Ni–Mn–Ga single crystals. *Applied Physics Letters*, 2003, vol. 83, pp. 3966–3968.
2. Schlüter K., Holz B., Raatz A. Principle Design of Actuators Driven by Magnetic Shape Memory Alloys. *Advanced Engineering Materials*, 2012, vol. 14, pp. 682–686.
3. Smith A. R., Tellinen J., Ullakko K. Rapid actuation and response of Ni–Mn–Ga to magnetic-field-induced stress. *Acta Materialia*, 2014, vol. 80, pp. 373–379.
4. Ostrikov V. O., Ostrikov O. M. Statics and dynamics of the austenite/martensite interface in a loaded prismatic shape-memory single crystal extending into a rigid constraint. *Mashinostroenie: sb. nauch. trudov* [Mechanical Engineering: Collection of scientific papers]. Minsk, BNTU, 2021, vol. 33, pp. 139–147 (in Russian).
5. Ostrikov V. O., Ostrikov O. M. Static and dynamic problem for a single martensitic interlayer in a ferromagnetic shape-memory single crystal subjected to a magnetic field and rigidly clamped. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki = Problems of physics, mathematics and technics*, 2023, no. 1 (54), pp. 43–46 (in Russian).
6. Vasilevich Yu. V., Ostrikov V. O., Ostrikov O. M. Statics and dynamics of the austenite/martensite interface in a prismatic ferromagnetic shape-memory single crystal under rigid clamping and a magnetic field. *Mashinostroenie: sb. nauch. trudov* [Mechanical Engineering: Collection of scientific papers]. Minsk, BNTU, 2023, vol. 34, pp. 131–139 (in Russian).
7. Vasilevich Yu. V., Ostrikov V. O., Ostrikov O. M. Statics and dynamics of austenite/martensite interfaces of a martensitic interlayer in a constrained, loaded, prismatic ferromagnetic single crystal exhibiting the shape memory effect. *Mashinostroenie: sb. nauch. trudov* [Mechanical Engineering: Collection of scientific papers]. Minsk, BNTU, 2023, vol. 34, pp. 139–146 (in Russian).

8. Ostrikov V. O., Ostrikov O. M. Calculation of forces acting on non-parallel austenite/martensite interfaces in a rigidly constrained ferromagnetic shape-memory single crystal. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta imeni F. Skoriny. Estestvennye nauki*, 2024, no. 3 (144), pp. 116–121 (in Russian).
9. Vasilevich Yu. V., Ostrikov V. O., Ostrikov O. M. A static mechanics problem for the interfaces of a martensitic interlayer under uniaxial tension/compression of a ferromagnetic shape-memory crystal. *Mashinostroenie: sb. nauch. trudov* [Mechanical Engineering: Collection of scientific papers]. Minsk, BNTU, 2025, vol. 36. pp. 173–183 (in Russian).
10. Lindquist P. G., Müllner P. Working Ni–Mn–Ga Single Crystals in a Magnetic Field Against a Spring Load. *Shape Memory and Superelasticity*, 2015, vol. 1, pp. 69–77.
11. Malla A. *Effect of composition of the magnetic and elastic properties of shape memory Ni–Mn–Ga: Master's thesis*. Ohio State University Publ., 2003. 191 p.
12. Begun P. I., Kormilitsyn O. P. *Applied Mechanics*. Saint Petersburg, Politekhnik Publ., 2006. 463 p. (in Russian).

Поступила 30.06.2026 г.