

И. П. МЫСОВСКИХ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЧАПЛЫГИНА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ
ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО ЧАСТНОГО ТИПА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 8 VI 1954)

В настоящей заметке доказывается «в большом» сходимость метода С. А. Чаплыгина ⁽¹⁾ в применении к задаче Дирихле для уравнения

$$\Delta u = f(x, y, u) \quad (1)$$

(и тем самым устанавливается существование решения этой задачи). Область D предполагаем односвязной, ограниченной и имеющей достаточно гладкую границу S .

1. Предполагаем, что f_u, f_{u^*} непрерывны и удовлетворяют неравенствам $f_u > 0$ и $f_{u^*} \geq 0$ при $(x, y) \in \bar{D}$ и при всех конечных u . (Второе неравенство можно заменить таким: $f_{u^*} \leq 0$.) Не ограничивая общности, можем предполагать, что граничные условия нулевые

$$u|_S = 0. \quad (2)$$

Определим последовательность $\{u_n(x, y)\}$ уравнениями:

$$\Delta(u_n - u_{n-1}) = f_u(x, y, u_{n-1})(u_n - u_{n-1}) + f(x, y, u_{n-1}) - \Delta u_{n-1}; \quad (3)$$

$$u_0 \equiv 0, \quad (u_n - u_{n-1})|_S = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

и докажем, что она сходится к решению задачи (1), (2). Можно было за u_0 взять любую дважды непрерывно дифференцируемую в D функцию, удовлетворяющую (2) и такую, что $du_0/dx, du_0/du$ непрерывны в $\bar{D}$.

Из условия $f_{u^*} \geq 0$ и (3) легко следует, что $f(x, y, u_n) - \Delta u_n \geq 0$ при $n = 1, 2, \dots$, а тогда из (3), (4) видно, что $u_n - u_{n-1} \leq 0$ в D ($n = 2, 3, \dots$). Таким образом, $\{u_n\}$ монотонно убывает.

Пусть V удовлетворяет условию (2) и неравенству

$$f(x, y, V) - \Delta V \leq 0. \quad (5)$$

Тогда $u_n \geq V$. Действительно, $u_n - V$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \Delta(u_n - V) &= f_u(x, y, u_{n-1})(u_n - V) + f(x, y, V) - \Delta V - \\ &- [f(x, y, V) - f(x, y, u_{n-1}) - f_u(x, y, u_{n-1})(V - u_{n-1})] \end{aligned}$$

и нулевым граничным условиям. Так как свободный член этого уравнения в силу $f_{u^*} \geq 0$ и (5) неположителен и так как $f_u > 0$, то $u_n - V \geq 0$. Следовательно, существует предельная функция, $u_n \rightarrow u$.

Покажем, что в качестве V можно взять решение уравнения $\Delta V = P$, удовлетворяющее нулевым граничным условиям, если постоянная $P \geq \max |f(x, y, 0)|$ в $\bar{D}$. Имеем

$$f(x, y, V) - \Delta V = f(x, y, 0) + f(x, y, \theta V) V_1^* - P \leq 0,$$

так как $f_u \geq 0$ и $V \leq 0$. Функцию V , удовлетворяющую условиям (2) и (5), назовем нижней функцией.

Введем обозначения

$$L = \max f_w(x, y, w), \quad l = \min f_w, \quad K = \max f_w,$$

где $\max$ и $\min$ берутся в области $(x, y) \in \bar{D}$ и $V \leq w \leq u_1$. Определим последовательность функций v_n уравнениями

$$\begin{aligned} \Delta(v_n - v_{n-1}) &= L(v_n - v_{n-1}) + f(x, y, v_{n-1}) - \Delta v_{n-1}, \\ v_0 &= V, \quad v_n|_S = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (6)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \Delta v_n - f(x, y, v_n) &= L(v_n - v_{n-1}) - [f(x, y, v_n) - f(x, y, v_{n-1})] = \\ &= \{L - f_w[x, y, v_{n-1} + \theta(v_n - v_{n-1})]\} (v_n - v_{n-1}). \end{aligned} \quad (7)$$

Если v_{n-1} — нижняя функция, то из (6) ясно, что $v_n - v_{n-1} \geq 0$, а тогда из (7) следует, что v_n тоже нижняя функция. Так как v_0 — нижняя функция, то установлено, что $\{v_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность нижних функций.

Было доказано, что $u_n \geq V$, где V — любая нижняя функция, в частности $u_n \geq v_n$. Вычитая (6) из (3) и делая простые преобразования, получим:

$$\begin{aligned} \Delta(u_n - v_n) &= L(u_n - v_n) - [L - f_u(x, y, u_{n-1})](u_n - u_{n-1}) - \\ &- \{L - f[x, y, v_{n-1} + \theta(u_{n-1} - v_{n-1})]\}(u_{n-1} - v_{n-1}). \end{aligned}$$

В некоторой точке области D разность $u_n - v_n$ достигает положительного максимума, и в этой точке $\Delta(u_n - v_n) \leq 0$, следовательно,

$$\max_{\bar{D}} [u_n - v_n] \leq \frac{L-l}{L} \max_{\bar{D}} [u_{n-1} - v_{n-1}].$$

Отсюда видно, что $u_n - v_n \rightarrow 0$ равномерно в $\bar{D}$ и, следовательно, $u_n \rightarrow u$ и $v_n \rightarrow u$ равномерно в $\bar{D}$. Легко проверить, что функция u является решением задачи (1), (2). Для этого достаточно задачу (3), (4) заменить равносильным интегральным уравнением с неизвестной функцией u , воспользовавшись функцией Грина оператора Лапласа для области D , и перейти в нем к пределу при $n \rightarrow \infty$.

Отметим быстроту сходимости u_n . Задавая число q , где $0 < q < 1$, можно фиксировать m так, что будет $|u - u_{m-1}| \leq \frac{2l}{K} q$. Тогда, как нетрудно показать,

$$|u - u_{m-1+s}| \leq \frac{2l}{K} q^{2^s} \quad (s = 0, 1, 2, \dots).$$

Последовательность u_n не будет сходиться, вообще говоря, если не предполагать $f_u \geq 0$ (или $f_u \leq 0$).

2. В последующем не предполагается, что f_u сохраняет знак; предположение о f_u сохраняется в ослабленной форме: $f_u \geq 0$.

Как и выше, убеждаемся, что решение уравнения $\Delta U = -Q$, $Q > 0$, удовлетворяющее условию (2), при Q достаточно большом будет верхней функцией, т. е. $f(x, y, U) - \Delta U \geq 0$, а решение уравнения $\Delta V = P$, $P > 0$, при достаточно большом P будет нижней функцией.

Обозначим $L = \max f_w(x, y, w)$, $(x, y) \in \bar{D}$ и $V \leq w \leq U$.

Определим последовательность $\{\sigma_n\}$ уравнениями

$$\begin{aligned} \Delta(\sigma_n - \sigma_{n-1}) &= L(\sigma_n - \sigma_{n-1}) + f(x, y, \sigma_{n-1}) - \Delta\sigma_{n-1}, \\ \sigma_0 &= U, \quad \sigma_n|_S = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (8)$$

а последовательность $\{v_n\}$ — уравнениями (6). Обе последовательности равномерно в $\bar{D}$ сходятся к функции u , которая является решением задачи (1), (2).

Ограничимся рассмотрением последовательности $\{v_n\}$. Для $\{\sigma_n\}$ рассуждение такое же. В п. 1 было установлено, что $\{v_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность нижних функций. Из (7) следует, что

$$\Delta v_n - f(x, y, v_n) \leq L(v_n - v_{n-1}). \quad (9)$$

Обозначим $N = \max_{\bar{D}} [\Delta v_0 - f(x, y, v_0)]$. Решение задачи

$$\Delta V_1 = LV_1 - N, \quad V_1|_S = 0 \quad (10)$$

удовлетворяет неравенству $v_1 - v_0 \leq V_1$. Функция $\bar{V}_1 = \frac{N}{L} - ce^{\sqrt{L/2}(x+y)}$ при любом c удовлетворяет уравнению (10). Возьмем $c > 0$ таким, что $\bar{V}_1 > 0$ в $\bar{D}$. Разность $\bar{V}_1 - V_1$ удовлетворяет уравнению $\Delta(\bar{V}_1 - V_1) = L(\bar{V}_1 - V_1)$ и положительна на S ; отсюда следует, что $\bar{V}_1 \geq V_1$.

Очевидно, $\bar{V}_1 = \frac{N}{L}q$, $0 < q < 1$ и, значит, $v_1 - v_0 \leq \frac{N}{L}q$. Из (9) при $n = 1$ находим $\Delta v_1 - f(x, y, v_1) \leq Nq$. Сравнивая уравнение $\Delta V_2 = LV_2 - Nq$ с уравнением (6) при $n = 2$, получим $v_2 - v_1 \leq \frac{N}{L}q^2$.

Вообще, $v_n - v_{n-1} \leq \frac{N}{L}q^n$. Отсюда легко следует наше утверждение.

Мы ограничились двумя независимыми переменными лишь для упрощения записи. Все остается в силе для любого числа переменных. Результат п. 2 в случае одной переменной известен ⁽²⁾.

Ленинградский
государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
3 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. А. Чаплыгин, Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, М.—Л., 1950. ² Б. Н. Бабкин, Прикладн. матем. и мех., 18, в. 2, 239 (1954).