

МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ ДЛЯ МЕТОДА ВЗВЕШЕННЫХ СРЕДНИХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 31 VII 1954)

Пусть A — метод суммирования рядов с матрицей (a_{nk}) определяемый преобразованием

$$U'_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} u_k \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

где ряды $\sum a_{nk} u_k$ предполагаются сходящимися. Если последовательность $\{U'_n\}$ сходится (абсолютно сходится или, соответственно, ограничена), то ряд $\sum u_k$ называется A -суммируемым ($|A|$ -суммируемым или, соответственно, A -ограниченным). В частности, если

$$a_{nk} = \begin{cases} 1 - \frac{P_{k-1}}{P^n} & \text{при } k \leq n, \\ 0 & \text{при } k > n, \end{cases}$$

где числа $P_n \neq 0$ при $n \geq 0$, $P_{-1} = 0$, то получается известный метод взвешенных средних арифметических, который мы обозначим через P .

Пусть B — метод суммирования рядов, данный матрицей (b_{nk}) . Если всякий A -суммируемый ряд $\sum u_k$ порождает B -суммируемый ряд $\sum \epsilon_k u_k$, то числа ϵ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) будем называть множителями суммируемости типа (A, B) . Аналогично определяются множители суммируемости типов $(|A|, B)$, $(|A|, |B|)$ и (A_0, B) , где A_0 означает A -ограниченность.

В настоящей заметке мы формулируем условия, необходимые и достаточные для того, чтобы числа ϵ_k служили множителями суммируемости типов (P, B) , $(|P|, B)$, $(|P|, |B|)$ или (P_0, B) . Некоторые частные случаи множителей суммируемости названных типов, главным образом случаи $B = E$ (E — метод обыкновенной сходимости) и $B = P$, рассматривались Юркато и Пейеримхоффом (¹⁻⁵). Методы функционального анализа и теорем о среднем значении, которыми пользовались Юркато и Пейеримхофф, в случае произвольного B неприменимы.

Предполагая метод P реверсивным, т. е. $p_k = P_k - P_{k-1} \neq 0$, можно доказать следующие теоремы применительно к случаю произвольного (регулярного или абсолютно регулярного) B .

Теорема 1. Если P сохраняет сходимость (т. е. суммирует все сходящиеся ряды) и B регулярен, то для того, чтобы числа ϵ_k были множителями суммируемости типа (P, B) , необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$1) \sum_{k=0}^{\infty} \left| P_k \Delta \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k} \right| < \infty \quad \text{и} \quad P_k \Delta \varepsilon_k = O(p_k);$$

$$2) \sum_{k=0}^{\infty} \left| P_k \varepsilon_{k+1} \Delta \frac{\Delta b_{nk}}{p_k} \right| = O(1) *;$$

$$3) b_{nk} P_k \varepsilon_k = O(p_k) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Теорема 2. Если P сохраняет абсолютную сходимость (т. е. абсолютно суммирует все абсолютно сходящиеся ряды) и B регулярен, то для того, чтобы числа ε_k были множителями суммируемости типа $(|P|, B)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$1) \varepsilon_k = O(1) \quad \text{и} \quad P_k \Delta \varepsilon_k = O(p_k);$$

$$2) P_k \varepsilon_k \Delta b_{nk} = O(p_k) \quad \text{независимо от } n;$$

$$3) b_{nk} P_k \varepsilon_k = O(p_k) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Теорема 3. Если P и B сохраняют абсолютную сходимость и B , сверх того, регулярен, то для того, чтобы числа ε_k были множителями суммируемости типа $(|P|, |B|)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$1) \varepsilon_k = O(1) \quad \text{и} \quad P_k \Delta \varepsilon_k = O(p_k);$$

$$2) P_k \varepsilon_k \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta(b_{nk} - b_{n-1, k})| = O(p_k);$$

$$3) b_{nk} P_k \varepsilon_k = O(p_k) \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$$4) \text{ существует } \lim_{k \rightarrow \infty} P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k} \Delta b_{nk} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Теорема 4. Если P сохраняет сходимость и B регулярен, то для того, чтобы числа ε_k были множителями суммируемости типа (P_0, B) , необходимо и достаточно выполнение следующих условий

$$1) \sum_{k=0}^{\infty} \left| P_k \Delta \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k} \right| < \infty, \quad P_k \Delta \varepsilon_k = o(p_k) \quad \text{и} \quad \varepsilon_k = o(1);$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left| P_k \varepsilon_{k+1} \Delta \frac{\Delta b_{nk}}{p_k} \right| = 0;$$

$$3) b_{nk} P_k \varepsilon_k = o(p_k) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Примечание 1. Если метод B конечнострочный, то условия 3 теорем 1—4, а также условие 4 теоремы 3 отпадают.

В частности, если $B = E$ (случай множителей сходимости), т. е. если $b_{nk} = 1$ при $k \leq n$ и $b_{nk} = 0$ при $k > n$, то условия 2 теорем 1—3 превращаются в $P_k \varepsilon_k = O(p_k)$, а условие 2 теоремы 4 в $P_k \varepsilon_k = O(p_k)$. При регулярном P тогда из теорем 1—4 вытекают предложения Юрката и Пейеримхоффа (1-3) о множителях сходимости относительно P , $|P|$ и P_0 .

Если $B = P$, то условия 2 теорем 1—4 можно опустить, и при регулярном P из теорем 1 и 2 получаются предложения Юрката и

* Разность Δb_{nk} определяется равенством $\Delta b_{nk} = b_{nk} - b_{n, k+1}$.

Пейеримхоффа ^(3,4) о множителях суммируемости типов (P, P) и $(|P|, P)$.

Примечание 2. Если $B = Q$, где Q — метод взвешенных средних арифметических, определяемый последовательностью $\{Q_k\}$, то условия теорем 2 и 3 сливаются. Отсюда вытекает, что множители суммируемости типов $(|P|, Q)$ и $(|P|, |Q|)$ совпадают, если P и Q сохраняют абсолютную сходимость и Q , сверх того, регулярен.

В частности, если $p_k > 0$, $q_k = Q_k - Q_{k-1} > 0$ и последовательность $\left\{\frac{q_k}{p_k}\right\}$ монотонна при $k \geq k_0$ и ограничена, то условие 2 теоремы 1 превращается в $P_k q_k \varepsilon_k = O(p_k Q_k)$, а условие 2 теоремы 4 в $P_k q_k \varepsilon_k = o(p_k Q_k)$. При регулярном P тогда из теорем 1 и 4 вытекают соответствующие предложения Юрката и Пейеримхоффа ⁽⁵⁾.

Примечание 3. При $\varepsilon_k = 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) условия 1 теорем 1—3 отпадают, и из этих теорем получаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы из P -суммируемости следовала B -суммируемость и из $|P|$ -суммируемости B - или $|B|$ -суммируемость. В частности, если $B = Q$, то из теоремы 1 вытекает известная теорема Гарабедяна и Рандельса ⁽⁶⁾ о включении методов взвешенных средних арифметических.

Тартуский
государственный университет

Поступило
1 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ W. Jurkat, Math. Zs., 54, 263 (1951). ² A. Peyerimhoff, ibid., 55, 44 (1951). ³ A. Peyerimhoff, ibid., 57, 285 (1953). ⁴ W. Jurkat, A. Peyerimhoff, ibid., 55, 103 (1951). ⁵ W. Jurkat, A. Peyerimhoff, ibid., 58, 196 (1953). ⁶ H. L. Garabedian, W. C. Randels, Duke Math. J., 4, 530 (1938).