

Е. В. ВОРОНОВСКАЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА К ПОЛИНОМАМ НАИМЕНЬШЕГО ОТКЛОНЕНИЯ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 16 VIII 1954)

Предлагаемая теория основана на некоторых результатах, полученных автором в 1937—1941 гг. (1).

1. Согласно теореме Рисса, линейный функционал, определенный на пространстве C непрерывных функций, имеет вид

$$F(f) = \int_0^1 f(t) dg(t).$$

Этот функционал вполне определяется заданием последовательности моментов

$$\mu_k = \int_0^1 t^k dg(t) \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Норму функционала F назовем N ; $N = \text{Var } g(t)_{[0,1]}$.

Если в C существует функция $\varphi(x)$, для которой $F(\varphi) = +N$; $\max_{[0,1]} |\varphi(x)| = 1$, назовем ее экстремальной функцией последовательности (1).

Функция, тождественно равная ± 1 , тогда и только тогда окажется экстремальной функцией, если $g(t)$ монотонна, т. е. если $(\mu_i)_{i=0}^{\infty}$ абсолютно монотонна.

В случае, если $f(x) = P_n(x) = \sum_{i=0}^n p_i x^i$, будем обозначать

$$P_n(\bar{\mu}) = F(P).$$

Теорема 1. Необходимое и достаточное условие того, чтобы среди экстремальных функций отыскался полином $P_n(x) \neq \pm 1$, состоит в следующем: интегрирующая функция $g(t)$ должна быть ступенчатой с конечным числом скачков на $0 \leq t \leq 1$. Тогда, если обозначим: $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s$ абсциссы всех точек разрыва $g(t)$ и $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s$ — соответственные скачки, всякий полином $P(x)$, для которого имеет место $|P(\sigma_k)| = 1$, $P(\sigma_k) \delta_k > 0$, $\max_{[0,1]} |P(x)| = 1$, является экстремальным полиномом.

2. Рассмотрим любой конечный отрезок чисел:

$$(\mu_i)_0^n = \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n. \quad (2)$$

Этот отрезок определяет линейный функционал F_n на пространстве $\{P_n(x)\}$ полиномов n -й степени. Обозначим его норму N_n . Здесь существование экстремального полинома очевидно.

Согласно теореме Хана, функционал F_n может быть «продолжен» на область $\{P_{n+1}(x)\}$ полиномов $(n+1)$ -й степени с сохранением нормы N_n ; это равносильно утверждению, что можно найти число μ_{n+1} так, что отрезок $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n, \mu_{n+1}$ определяет F_{n+1} с той же нормой N_n ; для этого число μ_{n+1} должно принадлежать точкам некоторого замкнутого интервала, который назовем интервалом наилучшего продолжения отрезка; число μ_{n+1} продолжает отрезок (2) наилучшим образом.

Назовем отрезок (2) абсолютно монотонным отрезком, если, последовательно продолжая его наилучшим образом, можем получить $(\mu_i)_0^\infty$ — абсолютно монотонную последовательность.

Теорема 2. Если отрезок (2) не абсолютно монотонный, то число μ_{n+1} , дающее наилучшее продолжение отрезка, единственно, т. е. интервал наилучшего продолжения обращается в точку; обозначим ее μ_{n+1} и назовем фокусом отрезка.

Следствие 1. Каждому не абсолютно монотонному отрезку соответствует единственная последовательность моментов

$$\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n, \mu_{n+1}, \mu_{n+2}, \dots, \mu_{n+p}, \dots, \quad (3)$$

полученная при помощи последовательного наилучшего продолжения отрезка (2).

Следствие 2. Каждому отрезку чисел $(\mu_i)_0^n$ (не абсолютно монотонному) соответствует вполне определенный единственный набор чисел (σ_i) : $0 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_s \leq 1$ — точек разрыва интегрирующей функции $g(t)$ последовательности (3); при помощи этого набора параметры отрезка напишутся в форме:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^s \delta_i \sigma_i^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Из системы (4) числа δ_i — скачки $g(t)$ — определяются однозначно. Каждую точку σ_i назовем истинным узлом отрезка (2). Очевидно, в истинных узлах экстремальный полином равен ± 1 .

Отнесем каждому σ_i определенный знак, совпадающий со знаком соответствующего ему δ_i , после чего обозначим систему узлов

$$\frac{\pm}{(\sigma_i)_1^s} \quad (5)$$

и назовем ее истинным распределением отрезка.

Теорема 3. Если число s истинных узлов отрезка $(\mu_i)_0^n$ удовлетворяет неравенству

$$s > \frac{n}{2} + 1, \quad (6)$$

то экстремальный полином отрезка единственный.

Такой отрезок назовем отрезком II класса.

Теорема 4. Каков бы ни был отрезок $(\mu_i)_0^n$, для каждого из параметров μ_k , за исключением μ_0 , существует вполне определенный интервал (μ'_k, μ''_k) , обладающий следующими свойствами: если $\mu_k \leq \mu'_k$ или $\mu_k \geq \mu''_k$, то экстремальный полином отрезка есть либо $+T_n(x)$, либо $-T_n(x)$, где $T_n(x) = \cos n \arccos(2x-1)$. Ни при одном значении μ_k , взятом внутри указанного интервала, полиномы $\pm T_n(x)$ не являются экстремальными. Интервал (μ'_k, μ''_k) будем называть критическим интервалом.

3. Определение 1. Выберем любые две системы действительных чисел $(\rho_i)_1^m$ ($\rho_i \neq 0$; $\rho_i \neq 1$; $\rho_k \neq \rho_l$) и $(\Delta_i)_1^m$ ($\Delta_i \neq 0$); построим

отрезок

$$\mu_0 = \sum_1^m \Delta_i, \quad \mu_1 = \sum_1^m \Delta_i \rho_i, \quad \dots, \quad \mu_n = \sum_1^m \Delta_i \rho_i^n. \quad (7)$$

Отнесем каждому ρ_i знак соответствующего ему Δ_i ; получим распределение $(\rho_i)_1^m$; если оно не совпадает с истинным распределением построенного отрезка $(\mu_i)_0^n$, назовем его фиктивным, а числа ρ_i фиктивными узлами отрезка.

Рассмотрим множество $\{Q_n(x)\}$ экстремальных полиномов всех отрезков $\{(\mu_i)_0^n\}$ II класса. Для каждого $Q_n(x)$ выделим на $[0, 1]$ все точки $(\sigma_i)_1^s$, в которых $Q_n(x) = \pm 1$. Отнесем σ_i знак $+$ (или $-$), если $Q_n(\sigma_i) = +1$ (или -1). Получим „распределение полинома“ $(\sigma_i)_1^s$. В дальнейшем закрепим обозначение $Q_n(x)$ за полиномом упомянутого множества.

Назовем промежуток между узлами (σ_k, σ_{k+1}) интервалом повторения (чередования), если знаки, отнесенные к σ_k и σ_{k+1} , одинаковы (различны). Обозначим число этих интервалов через p (соотв. q). Тогда:

$$p + q = s - 1; \quad (8)$$

$$s + p \leq n + 1. \quad (9)$$

Систему чисел n, s, p назовем паспортом полинома $Q_n(x)$ и обозначим $[n, s, p]$.

Если некоторый отрезок, для которого $Q_n(x)$ есть экстремальный полином, имеет фиктивное распределение с m узлами, то

$$p \leq m - 1. \quad (10)$$

4. Теорема 5. 1) *Всякий полином $Q_n(x)$ паспорта $[n, s, p]$ является экстремальным для некоторого отрезка II класса $(\mu_i)_0^n$ вида*

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{m_1} \Delta_i \rho_i^k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \quad \mu_n \neq \sum_{i=1}^m \Delta_i \rho_i^n,$$

где $(\rho_i)_1^m$ — фиктивные узлы отрезка $(\mu_i)_0^{n-1}$, причем $m + s = n + 1$; число m_1 узлов ρ_i в интервале $(0, 1)$ равно p , а остальные > 1 .

2) *Для отрезка $(\mu_i)_0^n$ такого вида справедливо $s_1 + m \geq n + 1$, где s_1 — число его истинных узлов, и для экстремального полинома отрезка имеет место $p \leq m_1$ и $s \geq s_1$.*

Теорема 6. 1) *Всякий полином $Q_n(x)$ паспорта $[n, s, 0]$ является экстремальным для некоторого отрезка II класса вида*

$$0_0, 0_1, \dots, 0_{m-1}, \pm 1_m, \mu_{m+1}, \dots, \mu_n, \text{ где } m = s - 1 \left(s > \frac{n}{2} + 1 \right)$$

(индексы при нулях указывают порядковые номера параметров).

2) *Для любого отрезка такого вида справедливо $s_1 \geq m + 1$, где s_1 — число истинных узлов отрезка; для его экстремального полинома в случае $s = m + 1$ имеет место $p = 0$.*

Теорема 7. *Если отрезок вида $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}, \theta$ при любом θ из промежутка $[\alpha, \beta]$ является отрезком II класса, то (единст-*

венный) экстремальный полином этого отрезка $Q_n(x, \theta) = \sum_0^n q_k(\theta) x^k$ таков, что каждая функция $q_k(\theta)$ непрерывна по θ .

Определение 2. Пусть в отрезке

$$\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}, \theta \quad (11)$$

θ меняется в интервале $[\alpha, \beta] \subset [\mu'_k, \mu''_k]$. Если: 1) при любом указанном θ отрезок принадлежит II классу; 2) все семейство экстремальных полиномов этого отрезка $R_n(x, \theta)$, имеет один и тот же паспорт; 3) любой полином множества $\{Q_n(x)\}$ такого паспорта входит в семейство $R_n(x, \theta)$, то отрезок (11) назовем определяющим отрезком для семейства полиномов этого паспорта.

Возьмем, например, отрезок:

$$1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}, \theta \quad (\rho > 1). \quad (12)$$

Тогда при любом θ , лежащем в критическом интервале

$$\rho^n - \prod_{i \neq n} (\rho - r_i) < \theta < \rho^n - \prod_{i \neq 0} (\rho - r_i)$$

$$(r_i = \cos^2 \frac{(n-i)\pi}{2n}, i = 0, 1, \dots, n),$$

все семейство $Q_n(x, \theta)$ экстремальных полиномов отрезка имеет паспорт $[n, n, 0]$; обратно, всякий полином такого паспорта принадлежит этому семейству. Отрезок (12) — определяющий (для полиномов Е. И. Золотарева).

Полиномы множества $Q_n(x)$, принадлежащие к одному паспорту, можно задавать, изучать и аналитически строить при помощи определяющего их отрезка.

5. Задача об отыскании экстремального полинома $Q_n(x)$ заданного отрезка $(\mu_i)_0^n$ эквивалентна задаче В. Маркова ⁽²⁾.

Задача Пшеборского ⁽³⁾ о нахождении полинома, наименее уклоняющегося от нуля среди множества полиномов, коэффициенты которых подчиняются двум линейным зависимостям, вообще приводится к задаче Маркова заменой двух данных зависимостей одной.

Ленинградский электротехнический
институт
им. М. А. Бонч-Бруевича

Поступило
29 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Е. В. Вороновская, Тр. ЛПИ, 22 (1937); 14 (1938); 23 (1941).
² В. А. Марков, О функциях, наименее уклоняющихся от нуля, 1893.
³ А. П. Пшеборский, Сообщ. Харьковск. матем. общ., сер. 2, 14, 65 (1913).