

П. И. КУЗНЕЦОВ, Р. Л. СТРАТОНОВИЧ и В. И. ТИХОНОВ

О ВОЗДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ НА ЛАМПОВЫЙ ГЕНЕРАТОР

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 3 II 1954)

В настоящее время в радиотехнике приобрел практический интерес вопрос о поведении лампового генератора при воздействии на него электрических флуктуаций, когда они являются медленно изменяющимися функциями относительно собственных автоколебаний лампового генератора, которые бы имели место в отсутствие флуктуаций. В данной работе приводится метод решения такой задачи. Он основан на применении обобщенного уравнения Эйнштейна — Фоккера ⁽¹⁾ и несколько отличается от применявшегося ранее ^(2, 3), когда флуктуации считались достаточно малыми по интенсивности и быстро изменяющимися во времени.

Как известно, поведение лампового генератора при наличии внешнего воздействия $\xi(t)$ может быть описано уравнениями

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, y_1, \xi), \quad \dot{y}_1 = g_1(x_1, y_1, \xi). \quad (1)$$

Выделим в этих уравнениях постоянную и линейные части, причем постоянная часть и коэффициенты при x_1 и y_1 могут зависеть от $\xi(t)$. Таким образом получим:

$$\dot{x}_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 y_1 + f(x_1, y_1, \xi), \quad \dot{y}_1 = b_0 + b_1 x_1 + b_2 y_1 + g(x_1, y_1, \xi).$$

Переходя к новым переменным

$$x = x_1 - \alpha, \quad y = y_1 - \beta,$$

где $\alpha = \frac{b_0 a_2 - a_0 b_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$, $\beta = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$, получим:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1 x + a_2 y + f(x + \alpha, y + \beta, \xi) - \dot{\alpha}, \\ \dot{y} &= b_1 x + b_2 y + g(x + \alpha, y + \beta, \xi) - \dot{\beta}. \end{aligned} \quad (2)$$

Перейдем в этих уравнениях к полярным координатам

$$y = A \sin \vartheta, \quad x = A(n \sin \vartheta + m \cos \vartheta).$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \dot{A} &= F(A, \vartheta, \xi) - \dot{\gamma} \cos \vartheta - \dot{\beta} \sin \vartheta, \\ \dot{\vartheta} &= -\omega + G(A, \vartheta, \xi) - \frac{1}{A}(\dot{\beta} \cos \vartheta + \dot{\gamma} \sin \vartheta), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} F(A, \vartheta, \xi) &= -nA + \frac{f - ng}{m} \cos \vartheta + g \sin \vartheta, \\ G(A, \vartheta, \xi) &= \frac{1}{A} \left(g \cos \vartheta + \frac{f - ng}{m} \sin \vartheta \right), \quad \gamma = \frac{\alpha - n\beta}{m}. \end{aligned}$$

Однако, согласно известному методу Н. Н. Боголюбова ⁽⁴⁾, к этим уравнениям можно применить усреднение по ϑ . Законность этой операции при наличии случайного воздействия $\xi(t)$ оправдывается предположением, что $\xi(t)$ имеет время корреляции

$$\tau_{\text{кор}} \gg T, \quad (4)$$

где T — период автоколебаний генератора.

Пренебрегая малыми членами, таким образом получим:

$$\dot{A} = \Phi(A, \xi), \quad \dot{\vartheta} = -\omega + \Psi(A, \xi), \quad (5)$$

$$\text{где } \Phi(A, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(A, \vartheta, \xi) d\vartheta, \quad \Psi(A, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(A, \vartheta, \xi) d\vartheta.$$

Первое из этих уравнений определяет флуктуации амплитуды, а второе — флуктуации фазы. Первое уравнение не зависит от ϑ , поэтому его можно решить самостоятельно, при помощи обобщенного уравнения Эйнштейна — Фоккера, которое при

$$\tau_{\text{кор}} \ll \tau_1, \quad (6)$$

где $\tau_1 \approx |(\partial\Phi/\partial A)^{-1}|$ — время релаксации амплитуды, имеет вид

$$\frac{\partial w(A, t)}{\partial t} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial A^s} [K_s(A) w(A, t)]; \quad (7)$$

здесь $w(A, t)$ — одномерная плотность вероятности, $K_s(A)$ — структурные числа.

Если в (7) можно пренебречь членами при $s = 3, 4, \dots$, то получим обычное уравнение Эйнштейна — Фоккера:

$$\frac{\partial w(A, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial A} [K_1(A) w(A, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial A^2} [K_2(A) w(A, t)], \quad (8)$$

где

$$K_1(A) = \overline{\Phi(A, \xi)}, \quad K_2(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \{\Phi(A, \xi)\Phi(A, \xi_\tau) - [\Phi(A, \xi)]^2\} d\tau. \quad (9)$$

Из (8) нетрудно получить выражение для одномерной стационарной функции плотности вероятности непосредственно в квадратурах. При $t \rightarrow \infty$ $\partial w/\partial t = 0$ и, следовательно,

$$K_1(A) w(A) - \frac{1}{2} \frac{d}{dA} [K_2(A) w(A)] = \text{const}; \quad (10)$$

выражение

$$j(A) = K_1(A) w(A) - \frac{1}{2} \frac{d}{dA} [K_2(A) w(A)]$$

представляет собою «поток вероятности» или, при статистическом толковании вероятности, интенсивность потока изображающих точек. В задачах рассматриваемого типа, когда изображающая точка не уходит из поля зрения, следует полагать «поток вероятности» равным нулю. Поэтому решение уравнения (10) можно записать:

$$w(A) = \frac{C}{K_2(A)} \exp \left[2 \int \frac{K_1(A)}{K_2(A)} dA \right], \quad (11)$$

причем постоянная интегрирования C определяется из условия нормировки

$$\int_0^{\infty} w(A) dA = 1. \quad (12)$$

Рассмотрим следующий типовой пример. Пусть стационарные гауссовские флуктуации $\xi(t)$ воздействуют в цепи сетки лампового генератора с колебательным контуром, включенным в цепь анода (см. рис. 1).

Для такой схемы при обычных предположениях и аппроксимации анодно-сеточной характеристики лампы полиномом третьей степени

$$i_a = i_0 + \alpha u_c + \beta u_c^2 - \gamma u_c^3 \quad (\alpha > 0, \gamma > 0)$$

в результате выполнения преобразований найдем, что уравнения (5) принимают следующий конкретный вид:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{\omega_0^2}{2} \left[(\alpha M - rC - 2\beta M\xi - 3\gamma M\xi^2) A - \frac{3}{4} \gamma M \left(\frac{M}{L} \right)^2 A^3 \right], \\ \dot{\vartheta} &= -\omega_0 + \frac{\delta \omega_0^2 M}{2} \left[\frac{3}{4} \gamma \left(\frac{M}{L} \right)^2 A^2 + (3\gamma \xi^2 - 2\beta \xi) \right]; \end{aligned} \quad (13)$$

здесь $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $\delta = r/\sqrt{L/C}$; остальные величины ясны из рис. 1.

Для структурных чисел по формулам (9) получим

$$K_1(A) = \mu A - \nu A^3, \quad K_2(A) = \lambda A^2; \quad (14)$$

здесь $\mu = \frac{\omega_0^2}{2} (\alpha M - rC - 3\gamma M\sigma^2)$, $\nu = \frac{3}{8} \omega_0^2 \gamma M \left(\frac{M}{L} \right)^2$, $\lambda = (\omega_0^2 M \sigma)^2 (\beta^2 \tau_{\text{кор}} + \frac{9}{2} \gamma^2 \sigma^2 \tau_{k2})$, $\tau_{\text{кор}} = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau$, $\tau_{k2} = \int_{-\infty}^{\infty} R^2(\tau) d\tau$, σ^2 — дисперсия, а $R(\tau)$ — коэффициент корреляции для $\xi(t)$.

Следовательно,

$$w(A) = \frac{C}{\lambda} A^{2(\frac{\mu}{\lambda} - 1)} \exp\left(-\frac{\nu}{\lambda} A^2\right), \quad (15)$$

причем

$$C = 2\lambda \left(\frac{\lambda}{\nu} \right)^{-\frac{\mu}{\lambda} - \frac{3}{2}} / \Gamma\left(\frac{\mu}{\lambda} - \frac{1}{2}\right). \quad (16)$$

Из формулы (15) видно, что при $\mu/\lambda < 1$ $w(A)$ обращается в бесконечность при $A = 0$. Возможность получения такого результата обусловлена тем, что $K_2(0) = 0$. Однако это равенство не есть точное вследствие приближенности метода, при помощи которого получены уравнения (5), а следовательно, также (13) и (14).

С качественной точки зрения режимы работы рассматриваемого генератора можно классифицировать следующим образом:

1) Когда $\mu < \lambda$, имеет место режим неразвитой генерации. Изображающая точка находится преимущественно вблизи положения равновесия ($A = 0$).

2) Когда $\lambda < \mu < \frac{3}{2}\lambda$, имеет место режим не полностью развитой генерации. Амплитуда колебаний рассеивается в большой полосе и может быть близка к нулю.

3) При $\mu > \frac{3}{2}\lambda$ имеем наиболее интересный случай — режим развитой генерации, когда изображающая точка находится преимущественно вблизи предельного цикла.

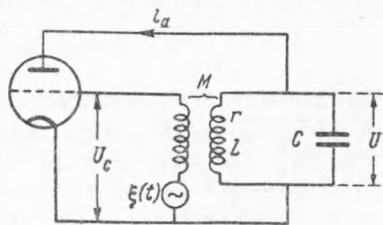


Рис. 1

При решении многих практических задач бывает недостаточно знать одномерное распределение случайной функции, а требуется уметь определять функцию корреляции. Для вычисления последней укажем метод, основывающийся на следующей формуле:

$$\frac{d}{d\tau} \overline{F(x_0, x_\tau)} = K_1(x_\tau) \frac{\partial}{\partial x_\tau} \overline{F(x_0, x_\tau)} + \frac{1}{2} K_2(x_\tau) \frac{\partial^2}{\partial x_\tau^2} \overline{F(x_0, x_\tau)}, \quad (17)$$

где F — произвольная функция, $x_0 = A(t)$, $x_\tau = A(t + \tau)$.

Докажем эту формулу. Пусть $w_0(x_0)$ — функция распределения плотности вероятности случайной величины x_0 и пусть $w_1(x_0, x_\tau, \tau)$ определяет вероятность $w_1(x_0, x_\tau, \tau) d\tau$ перехода точки, находящейся первоначально в x_0 , в интервал $[x_\tau, x_\tau + dx_\tau]$ за время τ . Функция плотности распределения $w_1(x_0, x_\tau, \tau)$ удовлетворяет тому же уравнению (8):

$$\frac{dw_1}{d\tau} = - \frac{\partial}{\partial x_\tau} [K_1(x_\tau) w_1(x_0, x_\tau, \tau)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_\tau^2} [K_2(x_\tau) w_1(x_0, x_\tau, \tau)].$$

Если подставить это выражение в формулу

$$\frac{d}{d\tau} \overline{F(x_0, x_\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x_0, x_\tau) w_0(x_0) \frac{dw_1(x_0, x_\tau, \tau)}{d\tau} dx_0 dx_\tau$$

и проинтегрировать результат по частям, то с учетом того, что, в силу условия нормировки, разность потоков вероятности $j(\infty) - j(-\infty)$ равна нулю и сама плотность вероятности равна нулю при $x_\tau \rightarrow \pm\infty$, получим формулу (17). В нашем частном случае, когда возможные значения A являются положительными и, следовательно, интегрирование выполняется в пределах от 0 до ∞ , формула (17) остается справедливой вследствие того, что $K_2(0) = 0$; $w_1(x_0, x_\tau, \tau) = 0$ при $x_\tau \rightarrow \infty$.

Поскольку нам известно одномерное распределение плотности вероятности $w(x)$, даваемое формулой (11), мы можем вычислить

$$\overline{F(x_0, x_\tau)} \Big|_{\tau=0} = F(x_0, x_0). \quad (18)$$

Придавая затем в формуле (18) функции F значения

$$F_n = \overline{A(t) A^n(t + \tau)}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (19)$$

представляется возможным получить формулы, определяющие изменение во времени средних значений $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2, \dots$, причем их начальные значения, соответствующие $\tau = 0$, также являются известными.

Таким образом мы получим цепочку линейных уравнений (вообще говоря, бесконечную) которую можно решать тем или иным приближенным способом.

Поступило
25 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов, ЖЭТФ, 26, в. 1 (1954). ² Л. Понтрягин, А. Андронов, А. Витт, ЖЭТФ, 3, 165 (1933). ³ И. Л. Бериштейн, Изв. АН СССР, сер. физ., 14, 1 (1950). ⁴ Н. Н. Боголюбов, О некоторых статистических методах в математической физике, 1945.