

Д. ИВАНЕНКО и Г. СОКОЛИК

ТЕОРИЯ ЧАСТИЦ ПРОИЗВОЛЬНОГО ИЗОТОПИЧЕСКОГО СПИНА И МЕТОД СЛИЯНИЯ

(Представлено академиком В. В. Шулейкиным 9 IV 1954)

В работе рассматриваются частицы произвольного обычного и изотопического спинов и способ образования волновых функций частиц высших изотопических и обычных спинов из волновых функций частиц, заданных в данном случае уравнением Паиса ⁽¹⁾.

Уравнение частицы, имеющей, вообще говоря, бесконечное число состояний обычного и изотопического спинов, зададим в виде

$$\left(L_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{(\vec{\sigma} \mathbf{I})}{\Lambda} + \kappa_0 \right) \psi(x, \omega) = 0, \quad (1)$$

где $\psi(x, \omega)$ зависит от четырех координат пространства Минковского и от двух параметров группы вращения единичной сферы ω_1, ω_2 ; Λ — константа размерности длины; $\mathbf{I}$ — оператор момента, $I_1 = \sin \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_2} + \text{ctg } \omega_2 \cos \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1}$, $I_2 = -\cos \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_2} + \text{ctg } \omega_2 \sin \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1}$, $I_3 = -\frac{\partial}{\partial \omega_1}$.

Матрицы L_k и σ_i ($i = 1, 2, 3$; $k = 0, 1, 2, 3$) удовлетворяют условиям инвариантности относительно группы Лоренца и группы вращения ^(2,3):

$$\begin{aligned} L_0 &= [[L_0 I^{01}]], \quad L_i = [L_0 I^{0i}] \quad (i = 1, 2, 3); \\ [[\sigma_3 H_-] H_+] &= 2\sigma_3, \quad \sigma_1 = [H'^{13} \sigma_3], \quad \sigma_2 = -[I'^{21} \sigma_3]; \\ H'_\pm &= I'^{21} \pm i I'^{13}; \end{aligned} \quad (2)$$

где $I^{01}, I^{02}, I^{03}, I^{21}, I^{13}, I^{32}$ и $I^{13'}, I^{21'}, I^{32'}$ — инфинитезимальные, в общем случае приводимые, представления, соответственно, группы Лоренца и группы вращения τ, ν , разлагающиеся на неприводимые, вообще говоря бесконечномерные, представления группы Лоренца $(k_0 k_1^i) = \tau_i$ и представления группы вращения $\nu_i = e_i$, причем базисные вектора обоих представлений обозначим $\xi_{p\tau}^k$ и ξ_{lm}^ν , где k пробегает значения $k = |k_0|, |k_0| + 1, |k_0| + 2, \dots$ (в случае, если k_0 и k_1 имеют одинаковую четность, последовательность обрывается на $k = |k_1| - 1$, что соответствует случаю конечномерного представления), $p = k, k - 1, \dots, -k$; $m = l, l - 1, \dots, -l$.

Как показано в ^(2,3), матрицы L_0 и σ_3 выражаются в виде

$$L_0 \xi_{p\tau}^k = \sum_{\tau'} c_{\tau\tau'}^k \xi_{p\tau'}^k, \quad \sigma_3 \xi_{lm}^\nu = \sum_{\nu'} c_{ll'}^{\nu\nu'} \xi_{l'm'}^\nu.$$

Вид $c_{\tau\tau'}^k$ и $c_{ll'}^{\nu\nu'}$ найден в работах ^(2,3). Таким образом, каждая пара представлений группы Лоренца и группы вращения задают, вообще говоря, бесконечномерное уравнение (1). Легко видеть, что в частном случае представления $(-1/2 \ 3/2) = (1/2 \ 3/2)$ и $l = 1/2$ задают уравне-

ние Паиса $(1) \left\{ \gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i} + x_0 + \frac{(\tau I)}{\Lambda} \right\} \psi_{\alpha\alpha}(x, \omega) = 0$, где γ_i — прямое произведение матриц Дирака на $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а τ_i — произведение матриц Паули на $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ундор $\psi_{\alpha\alpha}(x, \omega)$ преобразуется независимо по пред-

ставлениям обеих групп (a — спинорный индекс, α — векторный).

Пусть теперь мы имеем два уравнения типа (1), заданные, соответственно, представлениями $(\tau^{(1)}, \nu^{(1)})$; $(\tau^{(2)}, \nu^{(2)})$. Беря прямое произведение $(\tau^{(1)} \times \tau^{(2)})$ и $(\nu^{(1)} \times \nu^{(2)})$, задаем уравнение для слившихся функций $(\psi^{(1)} \psi^{(2)})$. Базисы $g_{p\tau}^h$ и g_{lm}^v обоих представлений выражаются через вектора $\xi_{p_1\tau_1}^{(1)k_1}$, $\xi_{p_2\tau_2}^{(2)k_2}$ и $\xi_{l_1m_1}^{(1)v_1}$, $\xi_{l_2m_2}^{(2)v_2}$ по формулам:

$$g_{lm}^v = \sum_{m_1+m_2=m} c_{m_1m_2}^l \xi_{l_1m_1}^{(1)v_1} \xi_{l_2m_2}^{(2)v_2}; \quad (3)$$

$$g_{p\tau}^h = \sum_{\substack{h_1+h_2=h \\ \tau_1\tau_2=p_1+p_2=p}} T_{p\tau; p_1\tau_1 p_2\tau_2}^{h; h_1 h_2} \xi_{p_1\tau_1}^{(1)k_1} \xi_{p_2\tau_2}^{(2)k_2}; \quad (3')$$

формула (3) есть обычное разложение Клебша — Гордана (4) , формула $(3')$ является обобщением формулы (3) для представлений группы Лоренца. Матрица T — ящичная матрица, составленная из матриц $T_{\tau_i\tau_j}$, соответствующих произведениям $\tau_i \times \tau_j$. Каждая $T = AC$, где C составлена из $\|c_{p_1p_2}^{h_1+h_2-n}\|$, занумерованных в лексикографическом порядке парами (k_1k_2) ; A принадлежит к классу матриц, перестановочных со скалярным оператором группы вращения H^2 ($c_{p_1p_2}^{h_1+h_2-n}$ — коэффициент разложения Клебша — Гордана). Можно показать, что произведение $\tau_i^{(1)} \times \tau_j^{(2)}$ в самом общем случае, когда $\tau_i^{(1)}$ и $\tau_j^{(2)}$ бесконечномерны, следующим образом разлагается на неприводимые представления:

$$[(k_0^{1i} k_1^{1i}) \times (k_0^{2j} k_1^{2j})] = \sum_{-\infty \leq h_1, l_1, h_2, l_2 \leq \infty} (k_0^{1i} + k_0^{2j} + k_1 - l_1; k_1^{1i} + k_1^{2j} + k_2 - l_2). \quad (4)$$

В частном случае, когда хотя бы одно из представлений, например $(k_0^{1i} k_1^{1i})$, конечномерно, разложение (4) записывается особенно просто:

$$\begin{aligned} [(k_0^{1i} k_1^{1i}) \times (k_0^{2j} k_1^{2j})] &= (k_0^{1i} + k_0^{2j} - 1) + \\ &+ (k_0^{1i} + k_0^{2j} + 1, k_1^{1i} + k_1^{2j} - 2) + (k_0^{1i} + k_0^{2j} - 1, k_1^{1i} + k_1^{2j} - 2) + \dots \\ &\dots + (k_0^{2j} - k_0^{1i}, k_1^{2j} - k_1^{1i} + 1). \end{aligned} \quad (4')$$

В случае, когда $\tau_i^{(1)}, \tau_j^{(2)}$ конечномерны, разложение совпадает с известной формулой Картана (5) . Произведение $(l_i \times l_j)$ разлагается по формуле $l_i + l_j, l_i + l_j - 1, \dots, |l_j - l_i|$. В бесконечномерном случае удобно применять более прямой способ нахождения уравнений для слившихся функций: зададим L_0 и τ_3 в базисах $\xi_{p_1\tau_1}^{(1)k_1}$, $\xi_{p_2\tau_2}^{(2)k_2}$ и $\xi_{l_1m_1}^{(1)v_1}$, $\xi_{l_2m_2}^{(2)v_2}$ в виде:

$$\begin{aligned} L_0 \xi_{p_1\tau_1}^{(1)k_1} \xi_{p_2\tau_2}^{(2)k_2} &= \sum_{\tau_1\tau_2\tau_3} c_{\tau_1\tau_2\tau_3}^{h_1k_1 h_2k_2} \xi_{p_1\tau_1}^{(1)k_1} \xi_{p_2\tau_2}^{(2)k_2}; \\ \tau_3 \xi_{l_1m_1}^{(1)v_1} \xi_{l_2m_2}^{(2)v_2} &= \sum_{l_1'l_2'l_3} c_{l_1'l_2'l_3}^{v_1v_2 v_3} \xi_{l_1m_1}^{(1)v_1} \xi_{l_2m_2}^{(2)v_2}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда условия инвариантности (2), получим две системы однородных уравнений, составленных, соответственно, относительно коэффициентов $c^{h_1 h_2}_{\tau_1 \tau_2 \tau_1 \tau_2}$ и $c^{v_1 v_2 v_1 v_2}_{l_1 l_2 l_1 l_2 m_1 m_2}$.

В качестве примера рассмотрим слияние двух уравнений Паиса, задающих частицу с обычным и изотопическим спинами, равными $1/2$. Используя (3) и (3') и требуя, чтобы уравнения слияния не имели дополнительных условий, получим представления $\psi \sim \{I = 0, 1\}$, $\tau \sim [(-12) = (02) = (12); (01) = (02); (01)]$, определяющие уравнения:

$$\left(\beta_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \alpha_0 + \frac{(\zeta I)}{\Lambda} \right) \psi(x, \omega) = 0, \quad (5)$$

где $\beta_i \beta_k \beta_l + \beta_l \beta_k \beta_i = \delta_{ik} \beta_l + \delta_{kl} \beta_i$, а $\zeta_{i'} \zeta_{k'} \zeta_{l'} + \zeta_{l'} \zeta_{k'} \zeta_{i'} = \delta_{i'k'} \zeta_{l'} + \delta_{k'l'} \zeta_{i'}$ ($i, k, l = 0, 1, 2, 3$; $i', k', l' = 1, 2, 3$); матрицы β_i — известные матрицы Дэффина⁽⁶⁾. Матрицы ζ_i были введены в недавней работе Вотруба и Локачека⁽⁷⁾. Уравнение (5) описывает два заряженных и два нейтральных мезона как четыре состояния одной частицы, обычный и изотопический спины которой принимают значения 0, 1. Из уравнений

для $c^{h_1 h_2}_{\tau_1 \tau_2 \tau_1 \tau_2}$ и $c^{v_1 v_2 v_1 v_2}_{l_1 l_2 l_1 l_2 m_1 m_2}$, предполагая, что β_0 приводима к диагональ-

ному виду (или, что то же самое, уравнение не имеет дополнительных условий), получим представление де Бройля⁽⁸⁾: $\beta_i = 1/2 (\gamma_{i'} I' + \gamma_i I)$, $\zeta_i = 1/2 (\tau_{i'} I' + \tau_i I)$, где $\gamma_i, \gamma_{i'}$ и $\tau_i, \tau_{i'}$ относятся к разным системам индексов (I, I' — соответствующие единичные матрицы).

Таким образом, мы показали, что к уравнениям Паиса, обобщающим уравнение Дирака на случай наличия операторов изотопического спина, можно применить теорию слияния де Бройля⁽⁸⁾. Аналогичное заключение относится также к уравнениям работы⁽⁷⁾. Уравнение (5) можно получить также методом, предложенным в работе⁽⁸⁾, при выполнении условий слияния де Бройля:

$$\begin{aligned} \psi_{a\alpha}^1 \frac{\partial \varphi_{a'\alpha}^2}{\partial x} &= \psi_{a'\alpha}^2 \frac{\partial \psi_{a\alpha}^1}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\psi_{a\alpha}^1 \psi_{a'\alpha}^2); \\ \psi_{a\alpha}^1 I_i \psi_{a\alpha}^2 &= \psi_{a\alpha}^2 I_i \psi_{a\alpha}^1 = \frac{1}{2} I_i (\psi_{a\alpha}^1 \psi_{a\alpha}^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Легко заметить, что развитый выше метод общее метода де Бройля и сводится к нему лишь при наложении дополнительного условия приводимости β_0 к диагональному виду, потому что в теории слияния частицы высших спинов описываются распадающимися уравнениями, что представляется искусственным с точки зрения общей теории И. Гельфанда и А. Яглома⁽²⁾, в нашем же методе, как показано выше, уравнения распадаются лишь в частных случаях.

Поступило
6 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ A. Pais, Physica, 19, 8, 69 (1953) ² И. Гельфанд, А. Яглом, ЖЭТФ, 18, 703 (1948). ³ И. М. Гельфанд, З. Я. Шапиро, Усп. матем. наук, 7, № 1, 3 (1952). ⁴ Б. Л. Ван дер Варден, Метод теории групп в квантовой механике, Киев — Харьков, 1938. ⁵ Э. Картан, Теория спиноров, М., ИЛ, 1947. ⁶ В. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, 1947. ⁷ V. Votruba M. Lokajicek, Československý časopis pro fyziku, 2, 97 (1952). ⁸ L. de Broglie, Théorie générale des particules a spin (methode de fusion), Paris, 1943.