

Г. Л. ГРОДЗОВСКИЙ

ВЫРАВНИВАНИЕ НЕРАВНОМЕРНОСТИ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ТУРБУЛЕНТНОМ И ЛАМИНАРНОМ ПОТОКЕ

(Представлено академиком Б. С. Стечкиным 15 V 1954)

Рассмотрим продольный осесимметричный турбулентный поток с неравномерным полем скоростей. При постоянном статическом давлении, пренебрегая вязкостью, запишем уравнение движения в цилиндрических координатах в виде

$$u_{\text{ср}} \frac{\partial u}{\partial X} + u \frac{\partial u}{\partial X} + v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \pi_{xr}), \quad (1)$$

где $u_{\text{ср}}$ — средняя скорость потока; u — продольная скорость; v — поперечная скорость; π_{xr} — касательное напряжение турбулентного трения. При малой неравномерности потока, пренебрегая в уравнении (1) малыми членами с u и v по сравнению с $u_{\text{ср}}$, запишем уравнение движения в виде

$$u_{\text{ср}} \frac{\partial u}{\partial X} = \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \pi_{xr}), \quad (2)$$

Выражение для турбулентного касательного напряжения принимаем по теории турбулентной диффузии ⁽¹⁻³⁾:

$$\pi_{xr} = \rho \overline{l_u v'} \frac{\partial u}{\partial r} = \rho \kappa R_0 (u_{\text{max}} - u_{\text{min}}) \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (3)$$

где $\overline{l_u v'} = \kappa R_0 (u_{\text{max}} - u_{\text{min}})$ — коэффициент турбулентной диффузии, постоянный в поперечном сечении потока; l_u — путь смешения скорости; v' — поперечная пульсационная скорость; R_0 — характерная ширина зоны турбулентного перемешивания; κ — экспериментальная константа, зависящая от степени турбулентности потока. Связь константы κ с общепринятой экспериментальной константой свободной турбулентности a ⁽²⁾ определяется соотношением ⁽³⁾

$$\kappa = 0,118a. \quad (4)$$

Принимая, что профили u в различных сечениях потока подобны, из анализа размерности уравнений (2) и (3) можно положить

$$u = u_m F(\bar{r}); \quad \bar{r} = \frac{r}{R_0}; \quad u_m = \frac{A u_{\text{ср}}}{X}, \quad (5)$$

где u_m — значение скорости u на оси симметрии; коэффициент A выбирается так, чтобы на оси $F \rightarrow 1,0$ при $r \rightarrow \infty$.

Обозначим $\alpha = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{u_m}$. Уравнение для $F(r)$ согласно (2), (3) и (5) является уравнением Бесселя

$$F'' + \frac{F'}{r} + \frac{R_0}{\alpha \chi A} F = 0, \quad (6a)$$

общее решение которого запишется в виде

$$F = C_1 J_0 \left(\sqrt{\frac{R_0}{\alpha \chi A}} \bar{r} \right) + C_2 Y_0 \left(\sqrt{\frac{R_0}{\alpha \chi A}} \bar{r} \right), \quad (6)$$

где J_0 и Y_0 — бesselовы функции нулевого порядка первого и второго рода.

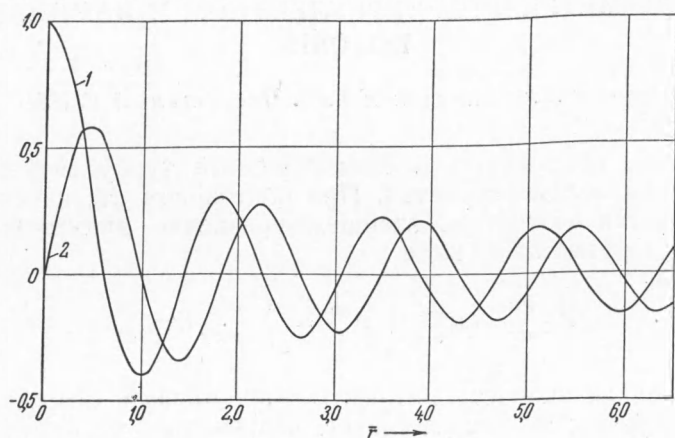


Рис. 1. 1 — $J_0(3,83 \bar{r})$; 2 — $J_1(3,83 \bar{r})$

Так как скорость u на оси симметрии остается конечной и равной u_m , то значения постоянных интегрирования равны $C_1 = 1,0$ и $C_2 = 0$. Следовательно, в рассматриваемой задаче распределение скорости u определяется бesselовой функцией J_0 (см. рис. 1)

$$u = u_m F(\bar{r}) = \frac{A u_{\text{cp}}}{X} J_0 \left(\sqrt{\frac{R_0}{\alpha \chi A}} \bar{r} \right). \quad (7)$$

Коэффициент α равен

$$\alpha = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{u_m} = (J_0)_{\max} - (J_0)_{\min} = 1,403.$$

По аналогии со струйными течениями в качестве характерного размера R_0 выберем расстояние (по радиусу) от $u_{\max}$ до $u_{\min}$, тогда $\sqrt{R_0/\alpha \chi A} = 3,83$, и выражение для продольной скорости окончательно запишется в виде

$$u = \frac{u_{\text{cp}}}{20,6 \chi \frac{X}{R_0}} J_0(3,83 \bar{r}) = \frac{u_{\text{cp}}}{2,43 \frac{aX}{R_0}} J_0(3,83 \bar{r}). \quad (8)$$

Поперечная скорость v определяется по уравнению неразрывности (рис. 1)

$$v = \frac{u_{\text{cp}}}{9,32 a \frac{X^2}{R_0^2}} J_1(3,83 \bar{r}), \quad (9)$$

где J_1 — бesselева функция первого порядка первого рода. Особенностью рассматриваемого течения является наличие цилиндрических поверхностей тока, радиусы которых $r_{\text{ц}}$ определяются условием $J_1 = 0$ ($v = 0$). Между этими цилиндрическими поверхностями направления потока наклонно к оси симметрии, знак угла наклона периодически меняется по $r_{\text{ц}}$. Картина линий тока приведена на рис. 2.

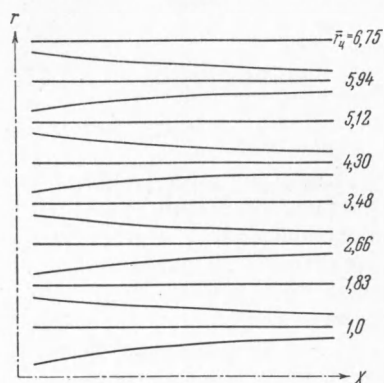


Рис. 2

Приведенное решение получено для случая малой неравномерности потока, однако его результаты согласуются с данными испытаний при существенных неравномерностях осесимметричного потока. В качестве примера на рис. 3 приведены результаты испытаний осесимметричного эжектора (⁽⁴⁾, стр. 327, фиг. 154), где за R_0 принят радиус камеры смешения: на рис. 3а приведено распределение скоростей u в нескольких сечениях цилиндрической камеры смешения эжектора, а на рис. 3б — изменение осевой скорости вдоль камеры смешения. Значение экспериментальной константы a оказалось равным $a = 0,06$ (рис. 3б), что совпадает с результатами исследования осесимметричных струй (⁽²⁾).

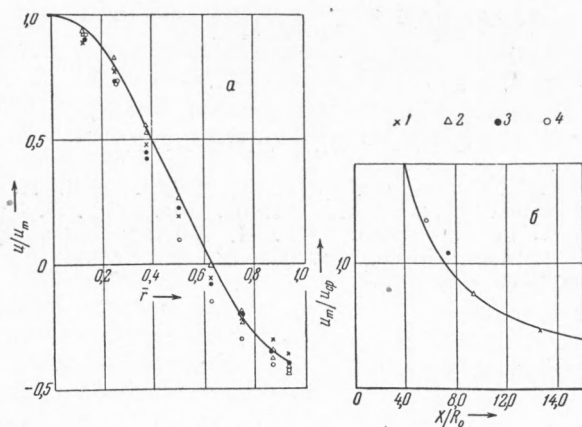


Рис. 3. Испытания осесимметричного эжектора с цилиндрической камерой смешения; $\alpha = 0,1$, $P_{01}/P_{02} = 2,25$, $u_{\text{ср}} = 118,5$ м/сек. а — $u/u_m = J_0(3,83 \bar{r})$; б — $u_m/u_{\text{ср}} = \frac{1}{2,43aX/R_0}$ при $a = 0,06$. 1 — $X/R_0 = 13,4$; 2 — 9,5; 3 — 7,5; 4 — 5,8

Полученные результаты показывают, что в осесимметричном турбулентном потоке неравномерность продольной скорости u выравнивается обратно пропорционально расстоянию X вдоль оси симметрии, профиль скорости u определяется бesselевой функцией J_0^* и максимальная неравномерность находится вблизи оси потока. При $r \rightarrow \infty$

* Или суммой функций J_0 , что, естественно, также является решением уравнения (6а).

мы переходим к плоской задаче, соответствующие формулы для профилей скорости в координатах X и Y запишутся в виде

$$u = \frac{u_{\text{ср}}}{19,74 \times \frac{X}{b_0}} \cos(\pi \bar{Y}) = \frac{u_{\text{ср}}}{2,33a \frac{X}{b_0}} \cos(\pi \bar{Y}),$$

$$v = \frac{u_{\text{ср}}}{7,32a \frac{X^2}{b_0^2}} \sin(\pi \bar{Y}).$$
(10)

Для плоского течения аналогичный результат получается и по теории переноса завихренности (⁵). Сопоставление формул (8), (9) и (10) показывает, что в плоском и осесимметричном турбулентном потоке интенсивность выравнивания неравномерности поля скоростей практически одинакова. Повидимому, поэтому совпадают потребные длины камер смешения у плоских и осесимметричных эжекторов.

В ламинарном осесимметричном потоке дифференциальное уравнение движения аналогично уравнению (6а). Профили скорости для ламинарного течения записываются в виде:

осесимметричное течение

$$u = u_{\text{ср}} \left[\exp 14,68 \frac{v}{u_{\text{ср}} R_0} \frac{X}{R_0} \right]^{-1} J_0(3,83 \bar{r});$$

плоское течение

$$u = u_{\text{ср}} \left[\exp \pi^2 \frac{v}{u_{\text{ср}} b_0} \frac{X}{b_0} \right]^{-1} \cos(\pi \bar{Y}).$$

Поступило
16 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. Я. Трубчиков, Тр. ЦАГИ, № 372 (1938). ² Г. Н. Абрамович, Турбулентные свободные струи жидкостей и газов, 1948. ³ Г. Л. Гродзовский, Прикл. матем. и мех., 14, в. 4 (1950). ⁴ Г. Н. Абрамович, Прикладная газовая динамика, 1953. ⁵ Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, под ред. С. Гольдштейна, ИЛ, 1948.