

П. К. РАШЕВСКИЙ

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 29 V 1954)

1°. Рассмотрим n -мерное дифференцируемое многообразие $(x^1, \dots, x^n)$ в окрестности какой-либо его точки O . Под дифференциальной группой D_v класса v мы понимаем группу всевозможных (v раз дифференцируемых) преобразований координатных систем $(x^1, \dots, x^n)$, рассматриваемых в окрестности точки O с точностью v -го порядка (т. е. пренебрегая бесконечно малыми порядка $> v$). При этом значения $x^1, \dots, x^n$ в точке O фиксированы; для простоты считаем их равными нулю.

Каждое преобразование группы D_v вполне характеризуется частными производными новых координат по старым, взятыми в точке O до порядка v включительно:

$$x_{i_1}^{i'}, x_{i_1 i_2}^{i'}, \dots, x_{i_1 i_2 \dots i_v}^{i'} \quad (1)$$

Группа D_v распадается в полупрямое произведение своей полупростой компоненты S и радикала R . При этом S состоит из унимодулярных линейных преобразований, точнее, для нее (1) принимает вид

$$x_{i_1}^{i'}, 0, \dots, 0 \quad (2)$$

при условии

$$\text{Det} |x_{i_1}^{i'}| = 1. \quad (3)$$

Радикал R состоит из преобразований (1) вида

$$\omega \delta_{i_1}^{i'}, x_{i_1 i_2}^{i'}, \dots, x_{i_1 i_2 \dots i_v}^{i'}; \quad (4)$$

таким образом первые дифференциалы dx^i умножаются на общий множитель ω (т. е. с точностью 1-го порядка мы имеем преобразование подобия).

Первоначально мы устраним из D_v преобразования подобия, т. е. будем предполагать, что в (1) всегда соблюдается условие (3), а значит преобразования радикала R имеют вид

$$\delta_{i_1}^{i'}, x_{i_1 i_2}^{i'}, \dots, x_{i_1 i_2 \dots i_v}^{i'}. \quad (5)$$

Полученную унимодулярную дифференциальную группу мы будем обозначать D_v^0 . Нашей задачей является отыскание всевозможных линейных представлений группы D_v^0 , что равносильно отысканию всевозможных типов линейных дифференциально-геометрических объектов класса v (при унимодулярном ограничении).

2°. Пусть в окрестности точки O дано произвольное скалярное поле $\varphi(x^1, \dots, x^n)$. Рассмотрим совокупность частных производ-

ных от φ по $x^1, \dots, x^n$ до порядка ν включительно, вычисленных в точке O :

$$\varphi_{i_1}, \varphi_{i_1 i_2}, \dots, \varphi_{i_1 i_2 \dots i_\nu}. \quad (6)$$

Вслед за преобразованием координат эти величины подвергаются вполне определенному линейному преобразованию с коэффициентами, зависящими от (1), так что мы получаем линейное представление D_ν^0 .

Совокупность величин (6), испытывающих указанное преобразование, мы будем называть ковариантным сверхвектором в точке O (независимо от способа получения этих величин). Координаты ковариантного сверхвектора мы будем обозначать кратко φ_I , где «сверхиндекс» I пробегает значения

$$I = (i_1), (i_1 i_2), \dots, (i_1 i_2 \dots i_\nu),$$

причем в скобках стоят всевозможные сочетания с повторениями по $1, 2, \dots, \nu$ индексов из числа $1, 2, \dots, n$ (т. е. порядок индексов, входящих в I , роли не играет). Построим теперь представление, контрагredientное представлению (6). Точнее, это представление, которое преобразует переменные ψ^I :

$$\psi^{i_1}, \psi^{i_1 i_2}, \dots, \psi^{i_1 i_2 \dots i_\nu} \quad (7)$$

таким образом, что результат свертывания $\varphi_I \psi^I$ всегда остается инвариантным. При этом в сумме $\varphi_I \psi^I$ мы повторяем каждое слагаемое столько раз, сколько перестановок можно сделать из индексов, входящих в I .

Совокупность величин (7) мы называем контравариантным сверхвектором. Теперь нетрудно определить «сверхтензор» с любым числом сверхиндексов $Z_{k_1 \dots k_q}^{i_1 \dots i_p}$, где каждый верхний сверхиндекс преобразуется как у ψ^I , а каждый нижний — как у φ_I .*

3°. Основная теорема. *Всякое (конечномерное) линейное представление группы D_ν^0 эквивалентно ее линейному представлению в пространстве координат некоторого числа контравариантных сверхтензоров $Z^{i_1 \dots i_p}_{k_1 \dots k_q}$, вообще говоря, при наличии (инвариантных) линейных связей между этими координатами (в остальном неопределенными).*

Тем самым всякий линейный дифференциально-геометрический объект (при унимодулярном ограничении дифференциальной группы) эквивалентен системе некоторого числа контравариантных сверхтензоров.

Доказательство теоремы довольно сложно, и мы его опускаем.

Можно связать с рассматриваемым представлением контрагredientное представление в пространстве координат некоторого числа сверхтензоров $Z_{i_1 \dots i_p}$ (каждый сверхтензор $Z^{i_1 \dots i_p}$ заменяется теперь сверхтензором $Z_{i_1 \dots i_p}$). Однако наличие (инвариантной) системы линейных связей между координатами $Z^{i_1 \dots i_p}$ заставляет нас при этом вместо пространства координат $Z_{i_1 \dots i_p}$ рассматривать его фактор-пространство по соответствующему инвариантному подпространству. Последнее можно представлять себе как пространство коэффициентов $A_{i_1 \dots i_p}$ во всевозможных линейных зависимостях

$$\Sigma A_{i_1 \dots i_p} Z^{i_1 \dots i_p} = 0,$$

* Сверхтензоры под наименованием «тензоров k -й степени» автор рассматривал еще в 1928 г. (1), стр. 7).

имеющих место для системы сверхтензоров $Z^{I_1 \dots I_p}$ (суммирование Σ идет по сверхтензорам системы).

Итак, наличие линейных связей для $Z^{I_1 \dots I_p}$ заменяется факторизацией пространства для $Z_{I_1 \dots I_p}$.

Рассматриваемое контрагредиентное представление, очевидно, также можно сделать эквивалентным любому наперед заданному линейному представлению D_v^0 .

4°. Чтобы снять унимодулярное ограничение (перейти от D_v^0 к D_v), нужно поступить следующим образом. В пространстве сверхтензоров $Z^{I_1 \dots I_p}$ (построенном согласно 3°) изображаем (отсутствовавшее раньше) преобразование подобия $x^{i'} = \omega x^i$ ($\omega > 0$) умножением каждого $Z^{I_1 \dots I_p}$ на ω^λ , где λ — общее число индексов в сверхиндексах $I_1, \dots, I_p$. Получаем линейное представление группы D_v , однако не самое общее. Чтобы получить общий вид представления, нужно построить в пространстве $Z^{I_1 \dots I_p}$ какое-либо линейное преобразование M , перестановочное со всеми преобразованиями уже имеющегося представления D_v^0 , и представлять преобразование подобия $x^{i'} = \omega x^i$ линейным преобразованием $e^{\ln \omega (M+L)}$, где L — линейное преобразование, умножающее каждый $Z^{I_1 \dots I_p}$ на λ . В обоих случаях линейные связи между $Z^{I_1 \dots I_p}$ допускаются лишь инвариантные относительно всех преобразований представления, включая и только что построенное.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
25 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, в. 1 (1933).