

О. А. ОЛЕЙНИК и Т. Д. ВЕНТЦЕЛЬ

ЗАДАЧА КОШИ И ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 20 V 1954)

Для квазилинейного параболического уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial t} + B(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} + F(x, t, u) \quad (1)$$

имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. В прямоугольнике $R\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ существует единственное решение $u(x, t)$ уравнения (1), непрерывное в R вместе с производными, входящими в уравнение (1), и удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) \equiv 0, \quad u(0, t) \equiv 0, \quad u(1, t) \equiv 0, \quad (2)$$

если выполнены следующие предположения:

1) в прямоугольнике R для всех значений u $A(x, t, u) \geq a > 0$, $F'_u(x, t, u) \geq c$, $|F(x, t, 0)| \leq M$, где a, c, M — некоторые постоянные;

2) в параллелепипеде $Q\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T, |u| \leq \frac{Me^{\alpha T}}{\alpha a + c} = M_1\}$, где α — положительное число и $\alpha a + c > 0$, существуют и удовлетворяют условию Липшица по x, t, u производные первого порядка по всем аргументам от функций $A(x, t, u)$, $B(x, t, u)$, $F(x, t, 0)$, $F'_u(x, t, u)$ и все производные второго порядка от этих функций по переменным x, u ; частные производные

$$A''_{xt}, A''_{ut}, A'''_{xxt}, A'''_{xtu}, A'''_{tuu}, A'''_{uxx}, A'''_{xuu}, A'''_{uuu} \quad (3)$$

и такие же производные от функций $B(x, t, u)$, $F(x, t, 0)$, $F'_u(x, t, u)$ существуют и удовлетворяют условию Липшица по x, t, u , когда $|u| \leq M_1$, а переменные t, x изменяются в любой замкнутой области, лежащей внутри R ;

3) функция $F(x, t, u)$ такова, что $F(0, 0, 0) = F(1, 0, 0) = 0$.

Теорема 2. В полосе $R_1\{-\infty < x < +\infty, 0 \leq t \leq T\}$ существует единственное ограниченное решение $u(x, t)$ уравнения (1), непрерывное в R_1 вместе с производными, входящими в уравнение (1), и удовлетворяющее условию

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{при} \quad -\infty < x < \infty, \quad (4)$$

если выполнены следующие предположения:

1) в полосе R_1 для всех значений u $A(x, t, u) \geq a > 0$, $F'_u \geq c$, $|F(x, t, 0)| \leq M$, где a, c, M — некоторые постоянные;

2) функции $A(x, t, u)$, $B(x, t, u)$, $F(x, t, 0)$, $F'_u(x, t, u)$, их частные производные первого и второго порядка по x и u равномерно огра-

ничены в $Q_1 \left\{ -\infty < x < +\infty, 0 \leq t \leq T, |u| \leq \frac{Me^{\alpha T}}{\alpha a + c} = M_1 \right\}$ и удовлетворяют условию Липшица по x, t, u в каждой конечной области, содержащейся в Q_1 ; производные первого порядка по t от этих функций также удовлетворяют условию Липшица по всем аргументам в любой конечной области, содержащейся в Q_1 ; производные (3) и такие же производные от функций $B(x, t, u)$, $F(x, t, 0)$ и $F_u(x, t, u)$ существуют и удовлетворяют условию Липшица по x, t, u в любой конечной замкнутой области, лежащей в Q_1 и не содержащей точек прямой $t = 0^*$.

Приведем основные идеи доказательства теоремы 1. В прямоугольнике R построим последовательность функций $u_n(x, t)$ ($n = 0, 1, \dots$) следующим образом. Пусть $u_0(x, t) \equiv 0$. Если u_{n-1} определено, то $u_n(x, t)$ определяем как решение в прямоугольнике R уравнения

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = A(x, t, u_{n-1}) \frac{\partial u_n}{\partial t} + B(x, t, u_{n-1}) \frac{\partial u_n}{\partial x} + C(x, t, u_{n-1}) u_n + F(x, t, 0), \quad (5)$$

для которого выполняются условия (2). При этом $C(x, t, u) \equiv \int_0^1 F_u(x, t, \tau u) d\tau$. Функции $u_n(x, t)$ и их производные, входящие в уравнение (5), удовлетворяют условию Липшица по x и t в R . Существование функций $u_n(x, t)$ и указанные их свойства вытекают из следующей теоремы, справедливой для линейных уравнений параболического типа.

Пусть коэффициенты уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + B(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + C(x, t) u + F(x, t) \quad (6)$$

имеют производные первого порядка по x и t и производные второго порядка по x , удовлетворяющие условию Липшица по x и t в прямоугольнике R , и пусть $F(0, 0) = F(1, 0) = 0$. Тогда уравнение (6) имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям (2), производные которого, входящие в (6), удовлетворяют условию Липшица по x и t в R .

Легко показать, сделав замену $u_n = e^{\alpha t} v_n$ и пользуясь принципом максимума, что $|u_n| \leq M_1$ в R . Пользуясь теоремами Жевре (1), нетрудно показать, что при выполнении условия 2) на коэффициенты уравнения (1) функции $u_n(x, t)$ имеют внутри R все те производные, которые входят в уравнения, полученные из (5) дифференцированием его правой и левой частей по x два раза, дифференцированием по t , а также дифференцированием по t и затем по x два раза. Функция $u(x, t)$, существование которой утверждается в теореме 1, является пределом равномерно сходящейся в R последовательности $u_n(x, t)$. Покажем, что последовательность $u_n(x, t)$ равномерно сходится в R , а последовательности du_n/dx , du_n/dt и d^2u_n/dx^2 равномерно ограничены в R и равномерно непрерывны в любой замкнутой области, лежащей внутри R .

Докажем сначала равномерную ограниченность последовательности du_n/dx на границе $x = 1$, $x = 0$ и $t = 0$ прямоугольника R . Чтобы оценить значение du_n/dx при $x = 1$, сделаем замену $w_n = u_n + \frac{e^{kx} - 1}{k}$, где k — достаточно большое положительное число, не зависящее от n .

* Теорема 2 остается справедливой, если условие (4) заменить условием $u(x, 0) = u_0(x)$, где $u_0(x)$ — ограниченная функция вместе с производными первого и второго порядка при $-\infty < x < +\infty$.

$L_{n-1}(w_n) \equiv \partial^2 w_n / \partial x^2 - A(x, t, u_{n-1}) \partial w_n / \partial t - B(x, t, u_{n-1}) \partial w_n / \partial x > 0$, следовательно, w_n принимает наибольшее значение при $x = 1$. Поэтому $\partial w_n / \partial x \geq 0$ при $x = 1$, или $\partial u_n / \partial x \geq -e^{kx}$. Аналогично можно оценить значения $\partial u_n / \partial x$ сверху при $x = 1$ и значения $\partial u_n / \partial x$ при $x = 0$. При $t = 0$ $\partial u_n / \partial x \equiv 0$ в силу условий (2). Если $|\partial u_n / \partial x|$ принимает наибольшее значение внутри R или при $t = T$, то, чтобы оценить $|\partial u_n / \partial x|$, сделаем преобразование в уравнении (5), положив

$$u_n = f(v_n) \equiv -2M_1 + 3eM_1 \int_0^{v_n} e^{-s^m} ds, \text{ где } m > 0 \text{ настолько велико, что}$$

$1 - \frac{6eM_1}{(m-1)a} \max \left| \frac{\partial A}{\partial u} \right| > 0$. Продифференцируем полученное уравнение по x . Обозначив $\partial v_n / \partial x$ через p_n , получим для внутренней точки R или точки на прямой $t = T$, в которой $|p_n|$ принимает наибольшее значение, неравенство

$$p_n \frac{\partial^2 p_n}{\partial x^2} \geq m(m-1)v_n^{m-2} p_n^4 - 3M_1 m v_n^{m-1} e^{1-v_n^m} a^{-1} \max \left| \frac{\partial A}{\partial u} \right| |p_n^3| |p_{n-1}| - \\ - \alpha_1 |p_n|^3 - \alpha_2 |p_n|^2 |p_{n-1}| - \alpha_3 |p_n|^2 - \alpha_4 |p_n| |p_{n-1}| - \alpha_5 |p_n|,$$

где α_i — постоянные, не зависящие от n . Из этого неравенства легко следует, что $|p_n| < P$, где постоянная P не зависит от n .

Значения $\partial^2 u_n / \partial x^2$ равномерно ограничены при $x = 0$, $x = 1$, $t = 0$, так как $\partial^2 u_n / \partial x^2 \equiv 0$ при $t = 0$, $\partial u_n / \partial t \equiv 0$ при $x = 0$ и $x = 1$ и на границе R удовлетворяется уравнение (5). Если $|\partial^2 u_n / \partial x^2|$ принимает наибольшее значение внутри R или при $t = T$, то его можно оценить точно так же, как и $|\partial u_n / \partial x|$, воспользовавшись при этом уравнением, которому удовлетворяет $\partial u_n / \partial x$ и равномерной ограниченностью последовательностей u_n и $\partial u_n / \partial x$. Равномерная ограниченность $\partial u_n / \partial t$ следует из уравнения (5). Покажем теперь, что в любой замкнутой области, содержащейся внутри R , $\partial^2 u_n / \partial x \partial t$ равномерно ограничены. Для этого воспользуемся методом С. Н. Бернштейна (2). Рассмотрим функцию $z_n = t(x-1)^2 x^2 \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial t} \right)^2 + C_1 \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 - \frac{C_2}{a} t \right]$, где C_1 и C_2 — достаточно большие положительные числа. Вычисляя $L_{n-1}(z_n)$, получим

$$L_{n-1}(z_n) \geq 2C_1 \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial t} \right)^2 - k_1 \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial t} \right)^2 - k_2 \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial t} \right| - \\ - k_3 t(x-1)^2 x^2 \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial t} \right| \left| \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x \partial t} \right| - k_4 + C_1 [C_2 - k_5], \quad (7)$$

где k_i — некоторые положительные постоянные. Предположив, что

$$\left| \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x \partial t} \right| \leq \sqrt{\frac{2C_1 \left(M_2 + \frac{C_2 T}{a} \right)}{t(x-1)^2 x^2}}, \quad (8)$$

где $M_2 \geq (\partial u_n / \partial t)^2$, получим из неравенства (7), что $L_{n-1}(z_n) \geq 0$. Следовательно, z_n принимает наибольшее значение на нижней основании или на боковых сторонах R и для $|\partial^2 u_n / \partial x \partial t|$ справедлива оценка (8).

Дифференцируя уравнения (5) по x , получим выражение $\partial^3 u_n / \partial x^3$ через функции, равномерную ограниченность которых в любой внутренней для R области мы доказали. Равномерную оценку для $\partial^3 u_n / \partial x^2 \partial t$ в любой замкнутой области, лежащей внутри R , получаем тем же путем, как мы оценили $|\partial^2 u_n / \partial x \partial t|$, используя при этом уже установленные оценки. Дифференцируя уравнение (5) по t , получим

выражение $\partial^2 u_n / \partial t^2$ через производные, которые мы оценили выше. Таким образом, мы установили компактность в смысле равномерной сходимости последовательностей du_n / dx , du_n / dt и $\partial^2 u_n / \partial x^2$ в любой замкнутой области, содержащейся в R . Чтобы доказать равномерную сходимость в R последовательности $u_n(x, t)$, рассмотрим разность $\eta_n = u_{n+1} - u_n$. Сделав замену $\eta_n = e^{\beta t} \delta_n$ в уравнении, которому удовлетворяет η_n , и выбрав $\beta > 0$ достаточно большим, получим, пользуясь принципом максимума, что $\max |\delta_n| \leq q \max |\delta_{n-1}|$, где $0 < q < 1$, откуда следует равномерная сходимость последовательности u_n в R к некоторой функции $u(x, t)$. Выбрав подпоследовательность u_n такую, чтобы du_n / dx , du_n / dt и $\partial^2 u_n / \partial x^2$ равномерно сходились, соответственно, к du / dx , du / dt и $\partial^2 u / \partial x^2$ в любой замкнутой области, содержащейся внутри R , и переходя к пределу в уравнении (5), получим, что $u(x, t)$ удовлетворяет внутри R уравнению (1). Непрерывность производных du / dx , du / dt и $\partial^2 u / \partial x^2$ на границе R доказываем при помощи барьеров, рассматривая дифференциальные уравнения для du_n / dx и du_n / dt и принимая во внимание, что эти производные равномерно ограничены в R и на границе $t = 0$, $x = 0$, $x = 1$ принимают последовательность значений, равномерно сходящуюся при $n \rightarrow \infty$. При этом можно пользоваться барьерами, аналогичными тем, которые обычно употребляются для уравнения теплопроводности ((³), стр. 345—349). Единственность решения $u(x, t)$ следует из того, что разность двух решений удовлетворяет линейному однородному уравнению.

Доказательство теоремы 2. Построим пользуясь теоремой 1, в прямоугольнике $R^m \{-m \leq x \leq m, 0 \leq t \leq T\}$ решение $u^m(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2} = A(x, t, u^m) \frac{\partial u^m}{\partial t} + B(x, t, u^m) \frac{\partial u^m}{\partial x} + C(x, t, u^m) u^m + F^m(x, t), \quad (9)$$

удовлетворяющее условиям: $u^m(x, 0) \equiv 0$, $u^m(-m, t) \equiv 0$, $u^m(m, t) \equiv 0$, где $F^m(x, t) = F(x, t, 0)$ при $-m + 1 \leq x \leq m - 1$ и $0 \leq t \leq T$, $F^m(-m, 0) = F^m(m, 0) = 0$ и $|F^m|$, $|F_x^m|$, $|F_{xx}^m|$ ограничены постоянной, не зависящей от m .

В R^m $|u^m(x, t)| \leq M_1$. Функция $u(x, t)$, существование которой утверждается в теореме 2, является пределом последовательности функций $u^m(x, t)$. Последовательности du^m / dx , du^m / dt и $\partial^2 u^m / \partial x^2$ равномерно ограничены в R_1 и равномерно непрерывны в любой конечной замкнутой области, не содержащей точек прямой $t = 0$.

Это следует из того, что оценки производных $u_n^m(x, t)$ в доказательстве теоремы 1 могут быть получены не зависящими от m . Непрерывность производных du / dx , $\partial^2 u / \partial x^2$ и, следовательно, du / dt при $t = 0$ можно доказать, пользуясь барьером вида $x^2 + 2kt$ (k — достаточно большая постоянная), уравнениями, которыми удовлетворяют производные du_n^m / dx и $\partial^2 u_n^m / \partial x^2$ и равномерной ограниченной этих производных в R_1 . Единственность решения задачи Коши в классе ограниченных функций можно доказать аналогично тому, как это сделано в ((³), стр. 328) для уравнения теплопроводности. За функцию w следует взять функцию $x^2 + tx^2 + kt$, где $k > 0$ — достаточно большая постоянная, и использовать построенное при доказательстве теоремы 2 решение $u(x, t)$.

Поступило
18 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Gevrey, J. de Math., 6 ser., 9, 305 (1913). ² С. Н. Бернштейн, ДАН, 18, № 7, 385 (1938). ³ И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, 1953.