

О БИНАРНОЙ АНАМОРФОЗЕ N -РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 20 V 1954)

Пусть $F(t, \tau) = F(t_1, \tau_1; t_2, \tau_2; t_3, \tau_3)$ некоторая аналитическая в области G функция. Рассмотрим те условия, при которых уравнение

$$F(t, \tau) = 0 \quad (1)$$

допускает анаморфозу вида

$$\Phi(t, \tau) = |f_{i1}(t_i, \tau_i); f_{i2}(t_i, \tau_i); f_{i3}(t_i, \tau_i)|, \quad (2)$$

где $\Phi(t, \tau)$ — аналитическая функция, отличающаяся от $F(t, \tau)$ лишь простым A -множителем,

$$\psi_3(t, \tau) = \psi_3(t_1, \tau_1; t_2, \tau_2), \quad (3)$$

$$\Phi(t, \tau) = \psi_3(t, \tau) \cdot F(t, \tau). \quad (4)$$

Под размерностью по (t_i, τ_i) уравнения (1) будем понимать размерность по (t_i, τ_i) функции $F(t, \tau)$ ⁽¹⁾.

Нетрудно показать, что размерность $F(t, \tau)$ по (t_3, τ_3) такова же как и функции $\Phi(t, \tau)$. Поэтому, считая уравнение (1) невырожденным ⁽¹⁾, следует рассмотреть случаи размерности его по (t_3, τ_3) , равной 3 и 2.

Теорема 1. Если $F(t, \tau)$ — N -рациональная по (t_i, τ_i) невырожденная функция размерности 3 по (t_3, τ_3) , то уравнение (1) тогда и только тогда допускает A -множитель (3), если ранг каждой из базисных его A -матриц $T^{(13)}$ и $T^{(23)}$ равен 2.

Необходимость условия следует из того, что для любой базисной A -матрицы $T^{(13)}$ данного уравнения

$$T^{(13)} \left| \begin{array}{c} \varphi_{11} \quad \varphi_{12} \dots \varphi_{1r_1} \\ f_{31} \quad v_{11}^{(2)} \quad v_{21}^{(2)} \dots v_{r_1 1}^{(2)} \\ f_{32} \quad v_{12}^{(2)} \quad v_{22}^{(2)} \dots v_{r_1 2}^{(2)} \\ f_{33} \quad v_{13}^{(2)} \quad v_{23}^{(2)} \dots v_{r_1 3}^{(2)} \end{array} \right| \quad (5)$$

Из тождества (2) будут следовать условия

$$\sum_{k=1}^3 f_{2k} v_{ik}^{(2)} \equiv 0 \quad (i = 1, \dots, r_1) \quad (6)$$

или, если, например,

$$\left| \begin{array}{cc} v_{11}^{(2)} & v_{21}^{(2)} \\ v_{12}^{(2)} & v_{22}^{(2)} \end{array} \right| \neq 0, \quad (7)$$

$$|v_{1k}^{(2)} v_{2k}^{(2)} v_{ik}^{(2)}| \equiv 0 \quad (i = 3, \dots, r_1), \quad (7')$$

то же имеет место и для A -матрицы $T^{(23)}$.

Если обратно, условия вида (8) и (7') соблюдены для $T^{(13)}$ и $T^{(23)}$, то коэффициенты F_k линейного разложения

$$F(t, \tau) = \sum_{k=1}^3 f_{3k} F_k \quad (8)$$

будут пропорциональны алгебраическим дополнениям элементов определителя (2).

Может случиться, что при соблюдении условий теоремы А-множитель окажется тривиальным, т. е. $\psi_3(t, \tau) = \psi_1(t_1, \tau_1) \cdot \psi_2(t_2, \tau_2)$; условия этого известны ⁽¹⁾.

Элементы анаморфозы (2), если она существует, легко определяются из $T^{(13)}$ и $T^{(23)}$; так, из $T^{(13)}$ имеем

$$f_{21} = \begin{vmatrix} v_{12}^{(2)} & v_{22}^{(2)} \\ v_{13}^{(2)} & v_{23}^{(2)} \end{vmatrix}; \quad f_{22} = \begin{vmatrix} v_{13}^{(2)} & v_{23}^{(2)} \\ v_{11}^{(2)} & v_{21}^{(2)} \end{vmatrix}; \quad f_{23} = \begin{vmatrix} v_{11}^{(2)} & v_{21}^{(2)} \\ v_{12}^{(2)} & v_{22}^{(2)} \end{vmatrix}; \quad (9)$$

аналогично найдем f_{1k} из $T^{(23)}$.

Справедлива следующая теорема о проективности анаморфоз:

Теорема 2. Если (невыврожденное) уравнение (1) размерности 3 по (t_3, τ_3) допускает А-множитель $\psi_3(t, \tau)$, то этот множитель определен с точностью до произведения $\psi_1(t_1, \tau_1) \cdot \psi_2(t_2, \tau_2)$.

Для уравнений (1) размерности 2 по (t_3, τ_3) вопрос приводится к только что рассмотренному случаю, именно:

Теорема 3. Если

$$F(t, \tau) = \sum_{k=1}^2 \varphi_{3k} F_k = \sum_{i,j=1}^{r_1, r_2} \varphi_{1i} \cdot \varphi_{2j} \cdot \varphi_{3k} \cdot a_{ijk}, \quad (10)$$

то уравнение (1) тогда и только тогда допускает А-множитель $\psi_3(t, \tau)$ (возможно и тривиальный), если его допускает вспомогательное уравнение $F(t, \tau) + f(t, \tau) = 0$, размерности 3 по (t_3, τ_3) , где $f(t, \tau)$ — дополнительная функция вида

$$f(t, \tau) = \varphi_{33} F_3 = \varphi_{33} \sum_{i,j=1}^{r_1, r_2} a_{ij3} \varphi_{1i} \varphi_{2j}. \quad (11)$$

При этом постоянные a_{ij3} находятся из системы линейных однородных уравнений.

Достаточность условия очевидна. Необходимость следует из того, что из анаморфозы (2) будут следовать тождества

$$F_3 = -\frac{f_{11}}{f_{13}} F_1 - \frac{f_{12}}{f_{13}} F_2 \quad (i = 1, 2), \quad (12)$$

а это и означает, что дополнительная функция $f(t, \tau)$, если она существует, будет вида (11). Коэффициенты a_{ij3} фактически будут определяться из тождеств вида (7') при помощи А-матриц $T^{(13)}$, $T^{(23)}$ вспомогательного уравнения.

Если функция $F(t, \tau)$ вещественна, то ее А-матрицы могут быть взяты также вещественными, как и коэффициенты a_{ij3} ; отсюда следует, что для вещественных уравнений (1), допускающих простой А-множитель, существуют вещественные же анаморфозы.

Все эти утверждения при $\tau_i = \text{const}$ применимы, в частности, к уравнениям $F(t_1, t_2, t_3) = 0$. Для этих уравнений вопрос рассматривался рядом авторов (⁽²⁻⁵⁾ и др.). Однако предлагаемые теоремы представ-

ляют интерес и для уравнений с тремя переменными. В частности, отыскание функции $f(t, \tau)$ теоремы 3 здесь приводятся к решению системы линейных алгебраических уравнений, а непосредственное применение известных условий Келлога ⁽³⁾ ведет к решению системы двух уравнений второго порядка в частных производных.

Из теоремы 3 следует, что бинарное уравнение 3-го N -порядка

$$F(t, \tau) = \sum_{i,j,k=1}^2 a_{ijk} f_{1i} f_{2j} f_{3k} = 0 \quad (13)$$

допускает простой A -множитель любого вида.

A -множитель $\psi_3(t, \tau)$, в частности, зависит от 4 параметров b_{ij} , связанных лишь тем условием, что ранг матрицы

$$\begin{vmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{211} & a_{221} \\ a_{112} & a_{122} & a_{212} & a_{222} \\ b_{11} & b_{12} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \quad (14)$$

равен 3.

Что касается бинарных уравнений 4-го N -порядка типа $[2; 2; 3]$, то, как известно ⁽¹⁾, при надлежащем выборе базисного разложения каждое из них может быть приведено к одной из двух канонических форм ⁽¹⁾.

Применяя к каждой из этих форм теоремы 1—3, получим:

Теорема 4. *Бинарное уравнение 4-го N -порядка (1) типа $[2; 2; 3]$ допускает, по существу, единственный простой A -множитель, именно, вида $\psi_3(t, \tau)$ (этот множитель является тривиальным для уравнения с дискриминантом, равным нулю).*

Справедлива также

Теорема 5. *Если бинарное (невырожденное) уравнение, неприводящееся к освобождению от какого-либо множителя к уравнению 3-го N -порядка, имеет прямую анаморфозу*

$$F(t, \tau) = |f_{i1} f_{i2} f_{i3}| = 0, \quad (15)$$

то оно не может допускать никакого простого A -множителя (отличного от тривиального).

Для уравнений 4-го и 6-го N -порядков это ясно из теорем 4 и 2. Для уравнения 5-го N -порядка типа $[2; 3; 3]$ достаточно после теоремы 2 рассмотреть случай A -множителя вида $\psi_1(t_2, \tau_2; t_3, \tau_3)$.

Из A -матриц $T^{(21)}$, $T^{(31)}$ вспомогательного уравнения $F(t, \tau) + f(t, \tau) = 0$, где

$$f(t, \tau) = f_{13} \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \cdot f_{2i} \cdot f_{3j}, \quad (16)$$

будут следовать для определения коэффициентов a_{ij} уравнения

$$|T^{(21)}| = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} f_{3i} f_{3j} \equiv 0, \quad (17)$$

$$|T^{(31)}| = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} f_{2i} f_{2j} \equiv 0. \quad (17')$$

Вычисления показывают, что анаморфозы, непроективные (15), будут лишь тогда, когда бинарные шкалы каждой из пар переменных (t_2, τ_2) , (t_3, τ_3) принадлежат одной и той же конике. Но в этом случае легко видеть, что уравнение (15) после освобождения от некоторого множителя приводится к уравнению 3-го N -порядка.

Способы отыскания анаморфоз бинарных уравнений требуют приведения данной функции к N -рациональному виду

$$F(t, \tau) = \sum_{i, j, k=1}^{r_1, r_2, r_3} a_{ijk} f_{1i} f_{2j} f_{3k}. \quad (18)$$

В тех случаях, где непосредственно не усматривается разложение вида (18), вопрос возможно решить при помощи следующего алгоритма, позволяющего найти функции $f_{1i}(t_i, \tau_i)$ ($i = 1, \dots, r_1$) разложения (18).

Пусть из семейства функций

$$F^{(0)}(t, \tau) = F(t_1, \tau_1; \alpha_2, \beta_2; \alpha_3, \beta_3) \quad (19)$$

уже выделено k линейно независимых в заданной для функции $F(t, \tau)$ области G функций

$$F^{(i)}(t, \tau) = F(t_1, \tau_1; \alpha_2^{(i)}, \beta_2^{(i)}; \alpha_3^{(i)}, \beta_3^{(i)}) \quad (i = 1, \dots, k) \quad (20)$$

и пусть уже подобраны частные значения переменных t_1, τ_1 :

$t_1 = \alpha_1^{(j)}; \tau_1 = \beta_1^{(j)}$ ($j = 1, \dots, k$) так, что определитель порядка k

$$\Delta_k = |F^{(i)}(\alpha_1^{(j)}, \beta_1^{(j)})| \quad (i, j = 1, \dots, k) \quad (21)$$

отличен от нуля.

Если определитель порядка $(k+1)$

$$\bar{\Delta}_{k+1} = |F^{(i)}(\alpha_1^{(j)}, \beta_1^{(j)})| \quad (i, j = 0, \dots, k), (\alpha_1^{(0)} = t_1; \beta_1^{(0)} = \tau_1) \quad (22)$$

равен в области G тождественно нулю, то функция $F(t, \tau)$ имеет по (t_1, τ_1) размерность k и система (20) может быть взята за базу (f_{1i}) по (t_1, τ_1) этой функции.

Если же $\bar{\Delta}_{k+1} \neq 0$ и $\alpha_l = \alpha_l^{(k+1)}, \beta_l = \beta_l^{(k+1)}$ ($l = 2, 3$) — частные значения параметров α_i, β_i , не обращающие $\bar{\Delta}_{k+1}$ тождественно в нуль, то, присоединив функцию $F^{(k+1)}(t_1, \tau_1)$ к системе (20), получим $k+1$ линейно независимых функций семейства (19).

Обоснование этого алгоритма следует из того, что за элементы f_{1i} разложения (18) можно взять любые r_1 линейно независимых функций семейства (19), если r_1 — максимальное число таких функций в (19) (1).

Кроме того функции $F^{(i)}(t_1, \tau_1)$ (20) будут тогда и только тогда линейно независимы, если возможен подбор значений переменных $t_1 = \alpha_1^{(j)}, \tau_1 = \beta_1^{(j)}$ ($j = 1, \dots, k$) так, что определитель Δ_k (21) будет отличен от нуля (5, 6).

Уральский политехнический институт
им. С. М. Кирова
Свердловск

Поступило
3 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ П. В. Николаев, ДАН, 88, № 2 (1953). ² O. D. Kellogg, Zs. f. Math. u. Phys., 63, 159 (1914). ³ А. И. Молдавер, Номограф. сбор., М., 1935. ⁴ С. В. Бахвалов, Сборн. Математика в СССР за 30 лет, 1948. ⁵ И. А. Вильнер, ДАН, 90, № 1 (1953). ⁶ В. Л. Гончаров, Теория интерполирования и приближения функций, 1934, стр. 162.