

Член-корреспондент АН СССР С. Н. МЕРГЕЛЯН

О ВЕСОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ МНОГОЧЛЕНАМИ

Рассмотрим произвольную неотрицательную ограниченную функцию $h(x)$, определенную на всей действительной оси. Через C_h обозначим класс непрерывных функций $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$), удовлетворяющих условию

$$h(x)f(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Мы будем говорить, что система полиномов полна при наличии весовой функции $h(x)$, если, какова бы ни была $f(x) \in C_h$,

$$\inf_{\{P\}} \sup_{-\infty < x < +\infty} h(x)|f(x) - P(x)| = 0, \quad (1)$$

где нижняя грань взята по всевозможным многочленам от x .

Через $\mathfrak{M}_h$ обозначим совокупность всех многочленов, удовлетворяющих неравенству

$$h(x)|P(x)| \leq 1, \quad -\infty < x < +\infty;$$

через $M_h(z)$ обозначим

$$\sup_{P \in \mathfrak{M}_h} |P(z)|.$$

Функция $\ln M_h(z)$ является субгармонической, причем

$$M_h(z) = M_h(\bar{z}).$$

Теорема 1. *Какова бы ни была весовая функция $h(x)$, возможны лишь два случая:*

или $M_h(z) \equiv \infty$, $\operatorname{Im} z \neq 0$;

или же всюду $M_h(z) < \infty$, причем для любого $\varepsilon > 0$

$$M_h(z) < e^{|z|^{1+\varepsilon}}, \quad |z| > R(\varepsilon). \quad (2)$$

Теорема 2. *Для полноты системы полиномов с весом $h(x)$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$M_h(z) \equiv \infty, \quad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Теорема 3. *Если система полиномов не полна с весом $h(x)$, то те функции $f(x)$, для которых справедливо (1), обязаны быть целыми функциями не выше первого порядка, причем*

$$|f(z)| \leq M_h(z) \sup_{-\infty < x < +\infty} h(x)|f(x)|. \quad (3)$$

Следствие. Если на вещественной оси оказывается возможным приблизить многочленами с весом $h(x)$ какую-нибудь функцию, не

являющуюся целой функцией порядка $\rho \leq 1$, то система полиномов полна с весом $h(x)$.

Рассмотрим произвольное нигде не плотное замкнутое множество E , разбивающее плоскость на конечное число неограниченных областей

$$CE = D_1 + D_2 + \dots + D_n.$$

Понятие весовой функции и весовых приближений переносятся очевидным образом с оси OX на E .

Теорема 4. Если $G(z)$ — произвольная целая функция, для которой:

- 1) $|G(z)| \leq 1, z \in E;$
- 2) $\sup_{z \in D_k} |G(z)| > 1, (k = 1, 2, \dots, n),$

то для полноты системы полиномов на E при наличии весовой функции $h(z)$ достаточно, чтобы для любого $p > 0$

$$[H(2|z|)]^p h(z) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty, z \in E, \quad (4)$$

где $H(R) = \max_{|z| \leq R} |G(z)|$.

Следствие. Пусть каждая из дополнительных к E областей содержит угол раствора α . Для полноты с весом $h(z)$ достаточно, чтобы для какого-либо $\varepsilon > 0$

$$h(z) < e^{-|z|^{\frac{\pi}{\alpha} + \varepsilon}}.$$

Наметим доказательства. Пусть в какой-либо точке $a, \operatorname{Im} a \neq 0, M_h(a) = \infty$. Покажем, что система полиномов полна с весом $h(x)$, а $M_h(z) \equiv \infty$. Из субгармоничности $\ln M_h(z)$ следует, что на некотором континууме E_a , содержащем a и простирающемся до бесконечности, $M_h(z) = \infty$. Пусть $t \in E_a$ и $P(z) \in \mathfrak{M}_h$. Полином

$$Q_t(z) = \frac{P(z) - P(t)}{(t - z)P(t)}$$

удовлетворяет неравенству

$$|x| h(x) \left| Q_t(x) - \frac{1}{x - t} \right| \leq \frac{1}{|P(t)|} \frac{|x|}{|x - t|},$$

в котором правая часть может быть сделана сколь угодно малой. То же справедливо и для $\frac{1}{x - \bar{t}}$. Из $M_h(a) = \infty$ следует, что $|x| h(x) <$

$< \text{const}$, поэтому линейными комбинациями функций $\frac{1}{x - t}, \frac{1}{x - \bar{t}} (t \in E_a)$

можно приблизить на оси с весом $|x| h(x)$ любую из функций $\frac{1}{x - b}$, b — произвольная точка, $\operatorname{Im} b \neq 0$. Таким образом, существуют полиномы $Q_b(z)$ такие, что

$$|x| h(x) \left| Q_b(x) - \frac{1}{x - b} \right| < \varepsilon.$$

Умножая обе части на $\frac{x - b}{\varepsilon}$, получаем многочлен, ограниченный с весом $h(x)$ на оси, равный $\frac{1}{\varepsilon}$ в точке b , т. е. $M_h(b) = \infty$. Полнота следует из того, что линейные комбинации функций $\frac{1}{x - t}, \frac{1}{x - \bar{t}}$, всюду плотны в C_h с весом $h(x)$.

Рассматривая случай, когда $M_h(z) < \infty$, докажем справедливость (2).

Пусть $1 \leq \lambda \leq 2$, $a = u + iv$, $v > 0$ и $|a| > 3$. Через θ_i будем обозначать числа, зависящие лишь от λ и a и ограниченные положительными абсолютными постоянными при изменении λ и a в указанных пределах.

Для любого $\varepsilon > 0$ можно указать числа $A_1, A_2, \dots, A_n$ так, что

$$\left| \frac{1}{x - i\lambda} - \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{(x-a)^k} \right| < \varepsilon, \quad -\infty < x < +\infty \quad (5)$$

$$n \leq \theta_1 \frac{|a|^2}{v} \ln \frac{|a|^3}{\varepsilon v^2}, \quad |A_k| \leq \exp \left\{ \theta_2 \frac{|a|^2}{v} \left(\ln \frac{|a|^3}{\varepsilon v^2} \right)^2 \right\}.$$

В самом деле, при преобразовании $\frac{1}{z-a} = w$ функция $\frac{1}{z-i\lambda}$ перейдет в функцию с особенностью, лежащей вне окружности $\left| w - \frac{i}{2v} \right| = \frac{1}{2v}$, соответствующей оси OX . Разлагая эту функцию в ряд по степеням $w - \frac{i}{2v}$, легко оценить коэффициенты этого ряда и быстроту его сходимости на окружности $\left| w - \frac{i}{2v} \right| = \frac{1}{2v}$. Отрезки этого ряда, представленные как многочлены от w , и дают сумму, входящую в левую часть (5).

Пусть $\varepsilon = \frac{v}{|a|^3}$ и $\delta = \exp \left\{ -C \frac{|a|^2}{v} \left(\ln \frac{|a|^3}{v} \right)^2 \right\}$, где $C > 0$ достаточно велико. Через $a_j^{(k)}$ обозначим точку окружности $|z-a| = \frac{\delta}{k}$, принадлежащую E_a ($j = 1, 2, \dots, k$).

Имеем

$$\left| \frac{1}{(z-a)^k} - \frac{1}{(z-a_1^{(k)}) \dots (z-a_k^{(k)})} \right| < \exp \left\{ -C \theta_3 \frac{|a|^2}{v} \left(\ln \frac{|a|^3}{v} \right)^2 \right\},$$

$$\frac{1}{(z-a_1^{(k)}) \dots (z-a_k^{(k)})} \equiv \sum_{i=1}^k \frac{B_i^{(k)}}{(z-a_i^{(k)})} \quad |B_i^{(k)}| \leq \left(\frac{\theta_4}{\delta} \right)^k \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Пусть $Q_{i,j}(z) = Q_{a_j^{(i)}}(z)$. Составим многочлен

$$P_\lambda(z) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^k A_k B_i^{(k)} Q_{i,k}(z).$$

Подсчеты показывают, что

$$h(x) \left| P_\lambda(x) - \frac{1}{x - i\lambda} \right| < \frac{v}{|a|^3} + \frac{1}{M_h(a)} \exp \left\{ \theta_5 \frac{|a|^4}{v^2} \left(\ln \frac{|a|^3}{v} \right)^3 \right\}. \quad (6)$$

Так же строится полином $P_{-\lambda}(z)$, соответствующий функции $\frac{1}{x+i\lambda}$. Если система полиномов не полна с весом $h(x)$, т. е. если $M_h(z) < \infty$, то правая часть (6) при $|a| \rightarrow \infty$ остается ограниченной снизу положительным числом

$$M_h(a) \leq \exp \left\{ \theta \frac{|a|^4}{v^2} \left(\ln \frac{|a|^3}{v} \right)^3 \right\}.$$

Пусть $R > 0$ произвольно. Через S_R обозначим шестиугольник с вершинами в точках $R-2, R+i, R+1+i, R+3, R+1-i, R-i$.

$$P(z) \exp \left\{ -CR^{4+\varepsilon} \frac{1}{(z-R+2)^3} - \frac{1}{(z-R-3)^3} \right\}, \quad (7)$$

где $P(z) \in \mathfrak{M}_h$, аналитична в S_R , непрерывна в $\bar{S}_R$ и на границе S_R не превосходит по модулю единицы (C — достаточно большое число, не зависящее от R). Отсюда по принципу максимума получаем в области $R < |z| < R+1$, $|\operatorname{Im} z| < 1$,

$$|P(z)| < e|z|^{4+\delta}. \quad (8)$$

Так как R произвольно, то, учитывая (7), заключаем, что (8) выполняется всюду, причем внутри любого из углов $\left| \arg z - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $\left| \arg z - \frac{3\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $|z| \geq R(\varepsilon)$ справедливо (2). Показатель 4 легко понизить до единицы.

Теорема 3 следует из того, что если последовательность полиномов $P_n(z)$ сходится с весом к $f(x)$ на оси OX , то в случае неполноты можно указать подпоследовательность $P_{n_k}(z)$, которая сходится всюду к целой функции, так как при $n > n(\varepsilon)$ для всех z

$$|P_n(z)| \leq \left\{ \sup_{-\infty < x < +\infty} h(x) |f(x)| + \varepsilon \right\} M_h(z).$$

Для доказательства теоремы 4 достаточно показать, что в любой из D_k существует континуум E_k такой, что для каждой точки $t \in E_k$ функцию $\frac{1}{z-t}$ можно приблизить полиномами с весом $h(z)$.

Из условия 2 теоремы следует, что существует в D_k континуум E_k , на котором $|G(z)| > \lambda > 1$.

Целая функция

$$\frac{[G(z)]^p - [G(t)]^p}{(t-z)[G(t)]^p}, \quad p > 0 \text{ целое,}$$

для достаточно большого p равномерно приближает $\frac{1}{z-t}$ на E с наперед заданной точностью. Отрезки ее ряда Тейлора приближают $\frac{1}{z-t}$ с весом $h(z)$, удовлетворяющим (4).

Следствие из теоремы 4 получаем, оценивая рост некоторой целой функции, ограниченной по модулю вне угла раствора α .

В случае, когда $h(z)$ отлична от нуля, лишь на счетном множестве точек, Холлом установлено ⁽¹⁾, что из $M_h(a) = \infty$ для какой-либо точки a следует $M_h(z) \equiv \infty$.

Следствие из теоремы 4 в более точной формуле получено М. М. Джрбашяном ^(2,3) в предположении, что множество E представляет конечное число спрямляемых и достаточно гладких кривых.

Сектор математики и механики
Академии наук Арм.ССР

Поступило
19 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ T. Hall, On Polinomials Bounded at Infinity of Points, Oppsala, 1950. ² М. М. Джрбашян, Метрические теоремы о полноте и о представимости аналитических функций, Диссертация, Ереван, 1948. ³ С. Н. Мергелян, Усп. матем. наук, 8, в. 4 (56) (1953).