

Н. Н. МЕЙМАН

К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 13 V 1954)

1°. В настоящей заметке изучается связь между дифференциальными и разностными уравнениями. Одно из независимых переменных — будем называть его временным переменным t — играет особую роль. Точку пространства $(t; x_1, \dots, x_N)$ будем обозначать $(t; x)$. Пусть в полупространстве $t \geq 0$ имеется сетка с шагами Δt и Δx . Под u_m^n понимаем $u(n\Delta t, m_1\Delta x_1, \dots, m_N\Delta x_N)$; здесь $m = (m_1, \dots, m_N)$ — составной индекс.

Пусть для дифференциального уравнения $L(u) = 0$ поставлена некоторая задача с начальными при $t = 0$ (задача Коши) или с начальными и граничными данными (смешанная задача). Разностная схема для поставленной задачи считается заданной, если известны: а) разностный оператор $L_\Delta(u)$, соответствующий дифференциальному оператору $L(u)$; б) правило переноса начальных и граничных данных на сетку; в) соотношение между шагами сетки. Порядком оператора q для краткости будем называть порядок по временному индексу. Рассматриваем только такие задачи и операторы $L_\Delta(u)$, что задание решения уравнения $L_\Delta(u) = 0$ на любых q слоях $v, v+1, \dots, v+q-1$ (q — порядок оператора) вместе с краевыми условиями однозначно определяют u_m^{v+q} .

Определение 1. Будем говорить, что разностный оператор $L_\Delta(u)$ порядка q аппроксимирует в данной схеме в некотором классе A решений данной задачи дифференциальный оператор $L(u)$ на полосе $0 \leq t \leq T$ с весом $M(x)$, если из соотношений на любых q слоях из $0 \leq t \leq T$

$$|u_m^v - \tilde{u}_m^v| < \Phi_1(\Delta t; l\Delta t) M(m\Delta x), \quad v = l, l+1, \dots, l+q-1,$$

где $\Phi_1(\Delta t; l\Delta t)$ — некоторая функция из класса $O(\Delta t^q)$ или $o(\Delta t^q)$ и $\tilde{u} \in A$, следует

$$|u_m^{l+q} - \tilde{u}_m^{l+q}| < \Phi_2(\Delta t; l\Delta t) M(m\Delta x),$$

где $\Phi_2(\Delta t; l\Delta t)$ — функция, соответственно, из класса $O(\Delta t^q)$ или $o(\Delta t^q)$. Функции Φ_1 и Φ_2 на полосе $0 \leq t \leq T$ обладают O - или o -свойством равномерно. Для o -свойства это означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что при $\Delta t < \eta$ $\Phi(\Delta t; l\Delta t) : \Delta t^q < \varepsilon$.

Определение 2. Оператор $L_\Delta(u)$ порядка q называется устойчивым в данной схеме относительно решения u_m^n с первым весом $M_1(x)$ и вторым весом $M_2(x, T)$ на полосе $0 \leq t \leq T$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что из неравенств

$$\frac{|u_m^v - v_m^v|}{M_1(m\Delta x)} < \eta < \varepsilon, \quad v = l, l+1, \dots, l+q-1,$$

для произвольных q слоев полосы $0 \leq t \leq T$ следует на этой полосе

$$|u_m^n - v_m^n| < \gamma M_2(m\Delta x, T)(n-l)^{q-1}, \quad n = \frac{t}{\Delta t},$$

где u и v — решения уравнения $L_\Delta(w) = 0$.

Теорема сходимости. *Предположим, что в полосе $0 \leq t \leq T$ существует решение задачи для дифференциального уравнения $L(u) = 0$ из класса A и в классе A в этой полосе в данной разностной схеме оператор $L_\Delta(u)$ порядка q аппроксимирует оператор $L(u)$ с весом $M_1(x)$. Если в полосе $0 \leq t \leq T$ оператор $L_\Delta(u)$ устойчив с первым весом $M_1(x)$ и вторым произвольным весом $M_2(x)$ и все начальные данные переносятся на узлы сетки с точностью до $o(\Delta t^q)M_2(m\Delta x)$, то при стремлении шагов сетки к нулю решение задачи для разностного уравнения стремится к решению задачи для дифференциального уравнения равномерно в любой ограниченной по x части полосы $0 \leq t \leq T$.*

Доказательство. Введем обозначения: $u_m^{(k)}$ — решение уравнения $L_\Delta(u) = 0$, совпадающее с $\tilde{u}_m^n$ на слоях $v = k, k+1, \dots, k+q-1$; $r_m^{(k)} = u_m^{(k+1)} - u_m^{(k)}$. Очевидно,

$$\tilde{u}_m^n(t) = \tilde{u}_m^n = u_m^{(n-q+1)} = u_m^{(0)} + r_m^{(1)} + r_m^{(2)} + \dots + r_m^{(n-q)}; \quad n\Delta t = t.$$

Из свойства аппроксимации следует $r_m^{(k+q)} = o(\Delta t^q)M_1(m\Delta x)$, а из устойчивости $|r_m^{(k)}| < o(\Delta t^q)M_2(m\Delta x)(n-k)^{q-1}$, следовательно

$$\left| r_m^{(0)} + r_m^{(1)} + \dots + r_m^{(n-q)} \right| = \frac{o(\Delta t^q)}{\Delta t^q} M_2(m\Delta x).$$

Отметим, что в работе ⁽¹⁾ для систем уравнений с коэффициентами, зависящими только от t (это ограничение по существу методики работы), содержится родственная теорема с другим определением устойчивости.

Определение 3. Если оператор $L_\Delta(u)$ при Δt и $\Delta x \rightarrow 0$ формально переходит в оператор $L(u)$ и какая-нибудь последовательность решений для $L_\Delta(u) = 0$ стремится к предельной функции, то эта функция называется обобщенным решением задачи.

Понятие аппроксимации и устойчивости с очевидными измерениями можно ввести не только в метрике C , но и в других метриках и для обобщенных решений. При этом теоремы единственности и сходимости остаются в силе.

Непосредственным следствием теоремы сходимости является

Теорема единственности. *Пусть для дифференциального уравнения $L(u) = 0$ в полосе $0 \leq t \leq T$ поставлена задача Коши или смешанная задача. Если существует разностная схема с оператором $L_\Delta(u)$, для которого выполняются все условия теоремы сходимости, то задача для уравнения $L(u) = 0$ имеет в классе A не более одного решения.*

Формулировки общих теорем существования решения очень громоздки, и мы ограничимся только указанием хода рассуждений для теорем существования. Пусть поставлена в полосе $0 \leq t \leq T$ задача для уравнения $L(u) = 0$, где

$$L(u) = \frac{\partial^q u}{\partial t^q} + \sum_{\substack{i=0,1,\dots,q-1 \\ j=0,1,\dots,r}} A_{ij}(x,t,u) \frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i \partial x^j} u = 0,$$

и существует разностная схема с устойчивым оператором вида

$$L_{\Delta}(u) = \frac{\Delta^q}{\Delta t^q} u + \sum \hat{A}_{ij} \frac{\Delta^{i+j}}{\Delta t^i \Delta x^j} u = 0,$$

где $\frac{\Delta^{i+j}}{\Delta t^i \Delta x^j} u$ — некоторым образом определенные разностные отношения.

Разностное отношение $\tau_m^n = \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{\Delta x}$ или другое, заменяющее это

отношение, удовлетворяет уравнению $L_{\Delta}^{(1)}(\tau) = 0$. Если этот оператор устойчив, а начальные и граничные данные, а также коэффициенты $\hat{A}_{ij}$ достаточно гладки, то τ ограничено. Аналогично оцениваем все разностные отношения, входящие в оператор $L_{\Delta}(u)$. Ограниченность всех разностных отношений дает возможность применить теорему Арцеля и доказать существование обобщенного решения задачи. Если коэффициенты и все данные достаточно гладки, то обычно возможно показать ограниченность разностных отношений на единицу большего порядка, и тогда следует существование решения в классическом смысле.

Если уравнение линейно, то доказательство проходит для всей полосы $0 \leq t \leq T$, в нелинейном случае доказывается существование только для некоторой части полосы.

2°. Мы ограничимся для иллюстрации простейшими примерами.

1) Рассмотрим для уравнения

$$L(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - A(t, x, u) \frac{\partial u}{\partial x} - B(t, x, u) u - C(t, x, u) = 0$$

задачу Коши в полупространстве $t \geq 0$ с начальной функцией $u(0, x) = \varphi(x)$, ограниченной в каждом конечном интервале. Коэффициенты A, B, C непрерывны и ограничены:

$$|A(t, x, u)| < a, \quad |B(t, x, u)| < b, \quad |C(t, x, u)| < c.$$

Схема задается так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \sim \begin{cases} \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{\Delta x} & \text{при } A_m^n > 0, \\ \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{\Delta x} & \text{при } A_m^n < 0, \end{cases} \quad \kappa = \frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{a}.$$

Для классического решения $L_{\Delta}(u)$ аппроксимирует $L(u)$. Очевидно,

$$u_m^{n+1} = (1 - A_m^n \kappa + B_m^n \Delta t) u_m^n + A_m^n \kappa u_{m+1}^n + C_m^n \Delta t, \quad A > 0.$$

При Δt настолько малом, что $1 - a\kappa - b\Delta t > 0$, $n = \frac{t}{\Delta t}$

$$|u_m^n| < M^{(n)}(t, x) = M^{(0)}(t, x) e^{bt} + \frac{c}{b} e^{bt};$$

$$M^{(0)}(t, x) = \sup |\varphi(\xi)|; \quad x - at \leq \xi \leq x + at. \quad (*)$$

В линейном случае отсюда следует устойчивость схемы. При условии непрерывности производной начальной функции, имеют место теоремы сходимости и единственности для классического решения. В линейном случае обобщенное решение существует, если коэффициенты A, B, C непрерывны по x и t , удовлетворяют условию Липшица по x с ограниченными константами и $\varphi(x)$ непрерывна. Для существования классического решения требуется, чтобы первые про-

изводные по x от A, B, C удовлетворяли условию Липшица с ограниченными константами и непрерывность $\varphi''(x)$.

В нелинейном случае схема устойчива при условии

$$|\Delta A| < \alpha \Delta x + \bar{\alpha} |\Delta u|, \quad |\Delta B| < \beta \Delta x + \bar{\beta} |\Delta u|, \quad |\Delta C| < \gamma \Delta x + \bar{\gamma} |\Delta u|,$$

и устойчивость имеет место при $0 \leq t < T_{кр}$, где

$$T_{кр} = \min \left[T, \frac{1}{r_1 - r_2} \ln \frac{r_1 + \bar{\alpha}\mu^{(1)}}{r_2 + \bar{\alpha}\mu^{(1)}} \right],$$

$r_{1,2}$ — корни уравнения

$$r^2 - (b + \alpha + \bar{\beta}M(t, x) + \bar{\gamma})r + (\beta M(t, x) + \gamma)\bar{\alpha} = 0, \\ \mu^{(1)} = \sup |\varphi'(\xi)|, \quad x - aT_{кр} \leq \xi \leq x + aT_{кр}, \quad M(t, x) \text{ из } (*).$$

В этой полосе имеют место теоремы сходимости и единственности. Для существования обобщенного или классического решения условия гладкости повышаются на одну или, соответственно, две единицы.

2) Задача Коши для гиперболической системы вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = A_i \frac{\partial u_1}{\partial x} + B_i \frac{\partial u_2}{\partial x} + C_i \quad (i = 1, 2)$$

для двух (число два существенно) независимых переменных сводится по существу к двум уравнениям рассмотренного типа.

3) Смешанная задача для общего волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A^2(t, x, u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(t, x, u) \frac{\partial u}{\partial x} + C(t, x, u)u + D(t, x, u);$$

$$t \geq 0, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, x) = \varphi^{(0)}(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(0, x) = \varphi^{(1)}(x), \quad u(t; \pm 1) = f_{\pm 1}(t),$$

начальные и граничные данные в точках $(0, \pm 1)$ согласованы и $f_{\pm 1}(t)$ дважды дифференцируемы. Эта задача сводится к системе двух уравнений с двумя независимыми переменными.

Пусть все коэффициенты и их первые производные по t и x ограничены, а $|f_{\pm 1}(t)|$ растут не скорее $k_1 e^{k_2 t}$. В линейном случае единственность классического решения имеет место при условии непрерывности функций $\partial^2 \varphi^{(0)}(x)/\partial x^2$, $\partial \varphi^{(1)}(x)/\partial x$. Для существования обобщенного решения $\partial A/\partial t$, $\partial A/\partial x$, B, C, D должны быть непрерывны по t и x и удовлетворять условиям Липшица по x . Для существования классического решения достаточно, чтобы $\partial^2 A/\partial x^2$, $\partial^2 A/\partial t \partial x$, $\partial B/\partial x$, $\partial C/\partial x$, $\partial D/\partial x$ были непрерывны по t и x удовлетворяли условию Липшица по x и $\partial^3 \varphi^{(0)}(x)/\partial x^3$, $\partial^3 \varphi^{(1)}(x)/\partial x^3$ непрерывны. В нелинейном случае требования гладкости на единицу повышаются и решение существует внутри прямоугольника $-1 \leq x \leq +1$, $0 \leq t \leq T_{кр}$, высота которого $T_{кр}$ оценивается аналогично тому, как в примере 1.

Институт физических проблем
им. С. И. Вавилова

Поступило
11 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 В. С. Рябенький, ДАН, 86, № 6 (1952).