

М. С. ЛИВШИЦ

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ. II

(Представлено академиком В. И. Смирновым 24 V 1954)

1. В предыдущей работе ⁽¹⁾ мы нашли общий вид оператора H_p , удовлетворяющего следующим условиям:

I. Матрица $H_p = A + pB$ ($0 < p < \infty$) эрмитова и линейна относительно p .

II. Оператор H_p имеет для каждого значения p ($0 < p < \infty$) одно и только одно собственное число E_p , причем

$$E_p = c \sqrt{m^2 c^2 + p^2} \quad (p > 0).$$

III. Матрица B задана равенством

$$B = cJ_0 = c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Было показано, что матрица H_p (при одном естественном ограничении) унитарно эквивалентна матрице $mc^2 T + cpJ_0$, где T — матрица Чебышева:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1/2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1/2} & 0 & 1/2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

В настоящей работе мы освобождаемся от условия III и показываем, что линеаризация при помощи матрицы Чебышева возникает в связи с требованием однозначности в условии II.

В дальнейшем будет доказана следующая теорема:

Теорема. Если оператор H_p удовлетворяет условиям I и II, а B — любой вполне непрерывный оператор, то матрицу H_p можно при помощи унитарного преобразования привести к виду

$$H_p = \begin{pmatrix} T_p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & T_p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & T_p & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & C \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $T_p = mc^2 T + cpJ_0$, а C — постоянная эрмитова матрица.

Если отбросить требование однозначности в условии II, предположив, что оператор H_p ($p > 0$) имеет два собственных числа $\pm c \sqrt{m^2 c^2 + p^2}$,

то линеаризацию можно будет осуществить уже при помощи матрицы 2-го порядка, полагая

$$H_p = mc^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + cp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = mc^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & p \\ p & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Известное уравнение Дирака⁽²⁾, дающее линеаризацию соотношения $E = c \sqrt{m^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$, можно получить, заменяя в равенстве (2) величину p матрицей $P = \sigma_1 p_x + \sigma_2 p_y + \sigma_3 p_z$, где $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, и матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ — некоторой элементарной матрицей 4-го порядка.

2. Семейство операторов $H_p = A + pB$, определенных в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, мы будем называть простым, если не существует инвариантного, общего для всех операторов H_p подпространства, на котором они индуцируют один и тот же оператор. Обозначим через ψ_j ($j = 1, 2, \dots, r$; $r \leq \infty$) полную ортонормированную систему собственных векторов оператора B , принадлежащих r -мерному многообразию $\mathcal{G} = B(\mathcal{H})$, а через b_j ($b_j \neq 0$; $j = 1, 2, \dots, r$) — соответствующие собственные числа.

Нетрудно показать, что условие простоты означает совпадение со всем пространством $\mathcal{H}$ линейной замкнутой оболочки множества элементов вида $A^n \psi_j$ ($n = 0, 1, 2, \dots$; $j = 1, 2, \dots, r$). Вместо элементов $A^n \psi_j$ могут быть взяты элементы вида $(A - \lambda I)^{-1} \psi_j$ ($\lambda > \|A\|$; $j = 1, 2, \dots, r$) либо элементы вида $E_t^{(p)} \psi_j$ ($a \leq t \leq b$; $j = 1, 2, \dots, r$), где $E_t^{(p)}$ — спектральная функция оператора H_p при $p \geq 0$.

Непростое семейство операторов H_p можно при помощи унитарного преобразования привести к виду

$$H_p = \begin{pmatrix} H'_p & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где H'_p — простое семейство, а C — постоянная самосопряженная матрица.

3. Введем в рассмотрение матрицу $\Phi_p(\lambda)$ r -го порядка, составленную из скалярных произведений

$$\Phi_p(\lambda) = \|(H_p - \lambda I)^{-1} \psi_j, \psi_k\| \quad (j, k = 1, 2, \dots, r). \quad (3)$$

Имеет место формула

$$\Phi_0(\lambda) = \Phi_p(\lambda) [I + p\beta\Phi_0(\lambda)], \quad (4)$$

где $\beta = \|b_j \delta_{jk}\|$.

В самом деле, полагая $(H_p - \lambda I)^{-1} \psi_j = u_j$, получим, что

$$\psi_j = (H_p - \lambda I) u_j = (A - \lambda I) u_j + p B u_j = (A - \lambda I) u_j + p \sum_{s=1}^r (u_j, \psi_s) b_s \psi_s,$$

откуда следует, что

$$(A - \lambda I)^{-1} \psi_j = u_j + p \sum_{s=1}^r (u_j, \psi_s) b_s (A - \lambda I)^{-1} \psi_s.$$

Умножая обе части последнего равенства скалярно на ψ_k , мы получим формулу (4).

Лемма. Пусть $H_p = A + pB$ — простое семейство операторов, а B — вполне непрерывный оператор. Число λ_p ($|\lambda_p| > \|A\|$) принадлежит спектру (дискретному) оператора H_p тогда и только тогда, когда $-1/p$ является собственным числом матрицы $\beta\Phi_0(\lambda_p)$.

Доказательство. Предположим, что $-1/p$ — собственное число матрицы $\beta\Phi_0(\lambda_p)$ и l_p — соответствующий собственный вектор. Тогда l_p удовлетворяет уравнению $[I + p\beta\Phi_0(\lambda_p)]l_p = 0$. Если бы точка λ_p не принадлежала спектру оператора H_p , то из равенства (4) следовало бы, что $\Phi_0(\lambda_p)l_p = 0$, а значит, и $l_p = 0$.

Допустим теперь, что $-1/p$ не является собственным числом матрицы $\beta\Phi_0(\lambda_p)$. Тогда матрицы $[I + p\beta\Phi_0(\lambda)]^{-1}$ и $\Phi_p(\lambda) = \Phi_0(\lambda)[I + p\beta\Phi_0(\lambda)]^{-1}$ регулярны в окрестности точки $\lambda = \lambda_p$. Так как оператор $H_p - A = pB$ вполне непрерывен, то вне промежутка $[-\|A\|, \|A\|]$ оператор H_p может иметь точки дискретного спектра (3). Из представления матрицы $\Phi_p(\lambda)$ в виде

$$\Phi_p(\lambda) = \int_a^b \frac{d\|(E_t^{(p)}\psi_j, \psi_k)\|}{t - \lambda}$$

теперь следует, что функция $E_t^{(p)}\psi_j$ ($j = 1, 2, \dots, r$) должна сохранять постоянное значение в некоторой окрестности точки $t = \lambda_p$. Так как операторы образуют простое семейство, то функция $E_t^{(p)}f$ сохраняет постоянное значение в указанной окрестности для любого элемента f ($f \in \mathcal{H}$). Другими словами, точка $t = \lambda_p$ не принадлежит спектру оператора H_p . Лемма доказана.

Из условия II, используя лемму, заключаем, что матрица $\beta\Phi_0(\lambda)$ имеет при $\lambda > \|A\|$ одно и только одно собственное число $-\frac{1}{p} = -\frac{1}{V\lambda^2 - 1}$ (без ограничения общности можно принять $m = c = 1$).

Поскольку матрица $\beta\Phi_0(\lambda)$ вполне непрерывна, отсюда следует, что $r < +\infty$. Матрица $\beta\Phi_0(\lambda)$ подобна самосопряженной матрице $V(\lambda) = = -(\Phi_0(\lambda))^{1/2}\beta(-\Phi_0(\lambda))^{1/2}$, которая также должна иметь единственное собственное число $-\frac{1}{V\lambda^2 - 1}$. Это возможно только тогда, когда

$$\beta\Phi_0(\lambda) = V(\lambda) \equiv \frac{-1}{V\lambda^2 - 1} I \quad (\lambda > \|A\|). \quad (5)$$

Более того, из (5) вытекает, что $\beta = I$. Действительно,

$$\beta\Phi_0(\lambda) = \int_a^b \frac{\beta d\sigma(t)}{t - \lambda} \equiv \frac{-1}{V\lambda^2 - 1} I, \quad (6)$$

где $\sigma(t) = \|(E_t^{(0)}\psi_j, \psi_k)\|$. Умножая обе части равенства (6) на λ и переходя к пределу, получаем $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \beta\Phi_0(\lambda) = -\beta \int_a^b d\sigma(t) = -\beta = -I$.

Легко видеть также, что матрица B — диагональная проекционная матрица в l_2 с r единицами, а элементы ψ_j ($j = 1, 2, \dots, r$) — орты основного базиса.

Переписывая (6) в виде

$$\int_a^b \frac{d\sigma(t)}{t - \lambda} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{(t - \lambda) \sqrt{1 - t^2}} I$$

и применяя формулу обращения интеграла Стильтеса, получаем

$$(E_t^{(0)}\psi_j, \psi_k) = 0 \quad (j \neq k, -1 \leq t \leq 1; a = -1, b = 1); \quad (7)$$

$$(E_t^{(0)}\psi_j, \psi_k) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^t \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} \quad (j = 1, 2, \dots, r; -1 \leq t \leq 1). \quad (8)$$

Из равенства (7) следует, что пространство $\mathcal{H}$ распадается в прямую сумму $\mathcal{H} = \sum_{j=1}^r \mathcal{H}_j$ инвариантных относительно H_p подпространств, образованных замыканиями линейных оболочек, элементов $E_t^{(0)} \psi_j$ ($-1 \leq t \leq 1$) или элементов $A^n \psi_j$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), а из соотношений (8) вытекает ⁽¹⁾, что в каждом из подпространств $\mathcal{H}_j$ ($j = 1, 2, \dots, r$) оператор H_p унитарно эквивалентен матрице $T + pJ_0$. Теорема доказана.

Поступило
7 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. С. Лившиц, ДАН, 97, № 3 (1954). ² П. А. М. Дирак, Основы квантовой механики, М.—Л., 1937. ³ В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 5, 1950.