

В. ЛЕММЛЕЙН

О ЕВКЛИДОВЫХ КОЛЬЦАХ И КОЛЬЦАХ ГЛАВНЫХ ИДЕАЛОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 V 1954)

В настоящей работе доказывается существование таких колец главных идеалов W , в которых нельзя определить никакой нормы G , относительно которой в кольце W можно было бы установить алгоритм Евклида. Результат этот доказывается не только для обычных норм с натуральными значениями, но и для обобщенных норм со значениями из произвольно вполне упорядоченного множества (см. определение 2). Пример кольца $K(\sqrt{-19})$, приведенный в конце работы, показывает существование колец главных идеалов алгебраических чисел, в которых нельзя установить алгоритм Евклида не только при обычной «норме» N , что хорошо известно, но и при какой бы то ни было «норме» G .

Определение 1. Область целостности с единицей V мы будем называть кольцом типа εI , если каждому элементу $v \in V$ ($v \neq 0$) можно отнести натуральное число $g(v)$ так, что для любых двух $a \in V$ и $b \in V$ ($b \neq 0$) найдется такой элемент $\xi \in V$, что $g(a - b\xi) < g(b)$. Дополнительно определяем $g(0) = \mu$, где $\mu < \min g(v)$.

Кольцо типа εI является обыкновенным евклидовым кольцом, однако целесообразно несколько обобщить это понятие.

Определение 2. Область целостности с единицей V мы будем называть кольцом типа εII , если каждому $v \in V$ ($v \neq 0$) можно отнести $G(v) \in S$, где S — некоторое вполне упорядоченное множество, так, что для любых двух элементов $a \in V$ и $b \in V$ ($b \neq 0$) можно найти $\xi \in V$ такой, что $G(a - b\xi) < G(b)$. Дополнительно определяем $G(0) = \mu$, где $\mu < \min G(v)$.

В кольце типа εII , так же как и в кольце типа εI , возможен алгоритм Евклида с конечным числом операций.

Действительно, если бы в кольце типа εII число операций в алгоритме Евклида было бесконечным, то множество значений функции G содержало бы подмножество, не содержащее первого элемента, и, следовательно, не было бы вполне упорядоченным.

Очевидно, что кольцо типа εI является кольцом типа εII . Вопрос о том, существуют ли кольца типа εII , не являющиеся кольцами типа εI , пока остается открытым.

Теорема. Пусть W — кольцо главных идеалов, S^* — вполне упорядоченное множество. Пусть каждому элементу $w \in W$ ($w \neq 0$) отнесен $G^*(w) \in S^*$, $G^*(0) = \nu$, где $\nu < \min G^*(w)$.

Кольцо W не будет кольцом типа εII , если найдется такой элемент $M \in S^*$, что для каждого $b \in W$ с условием $G^*(b) > M$ существует такой $a \in W$, что для любого $\xi \in (W)$ $G^*(a - b\xi) \geq G^*(b)$.

Доказательство. Допустим, что W является кольцом типа εII . Очевидно, тогда для каждого $b \in W$ должна существовать такая полная система вычетов $\eta_j \bmod (b)$, что $G(\eta_j) < G(b)$. По условию теоремы для каждого $b \in W$ с $G^*(b) > M$ найдется такое $a \in W$, что $G^*(a - b\xi) \geq$

$\geq G^*(b)$ для любого $\xi \in W$. Придадим ξ такое значение $\xi^{(1)}$, что $a - b\xi^{(1)} = \eta_j^{(1)}$, где $\eta_j^{(1)}$ удовлетворяет условию $G(\eta_j^{(1)}) < G(b)$, причем $G^*(\eta_j^{(1)}) \geq G^*(b) > M$. Аналогично для $\eta_j^{(1)}$ найдем $\eta_j^{(2)}$ такое, что $G(\eta_j^{(2)}) < G(\eta_j^{(1)}) < G(b)$, причем опять $G^*(\eta_j^{(2)}) \geq G^*(\eta_j^{(1)}) \geq G^*(b) > M$ и т. д. Так как каждый раз $G^*(\eta_j^{(i)}) > M$, то мы можем получить неограниченную влево последовательность:

$$\dots G(\eta_j^{(i+1)}) < G(\eta_j^{(i)}) < \dots < G(\eta_j^{(2)}) < G(\eta_j^{(1)}) < G(b),$$

чего быть не может, так как всякое подмножество вполне упорядоченного множества должно содержать первый элемент.

В заключение приведем пример, который покажет возможность существования колец главных идеалов, удовлетворяющих условию теоремы.

Пример. Кольцо главных идеалов $K(\sqrt{-19}) = x + y \frac{1 + \sqrt{-19}}{2}$, x и y — целые рациональные, удовлетворяет поставленным в теореме требованиям.

Доказательство. В кольце главных идеалов $K(\sqrt{-19})$ число классов вычетов по любому идеалу $(b) \neq 0$ конечно и выражается нормой $N(b) = b\bar{b}$, где b и $\bar{b}$ — сопряженные числа. Положим $G^*(b) = N(b)$ и $M = 81$, тогда для любого $b \in K(\sqrt{-19})$ с условием $N(b) > 81$ найдется $a \in K(\sqrt{-19})$ такое, что при

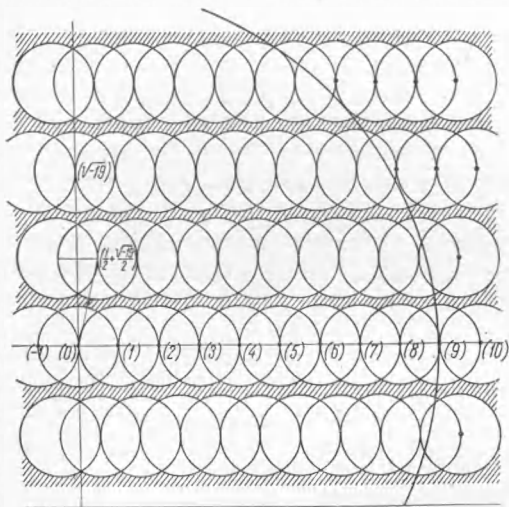


Рис. 1

любом $\xi \in K(\sqrt{-19})$ имеем $N(a - b\xi) \geq N(b)$.

Действительно, утверждение $N(a - b\xi) \geq N(b)$ эквивалентно утверждению $N\left(\frac{a}{b} - \xi\right) \geq 1$. Последнее же на геометрическом языке означает, что для любой точки (b) изображенной на чертеже решетки (см. рис. 1), удаленной более чем на $\sqrt{81} = 9$ от точки (0) , найдется такая точка (a) , что (a/b) непременно попадет на одну из заштрихованных полос.

Первый случай. Пусть (b) — мнимая точка. В этом случае (a) может быть выбрано даже натуральным. В самом деле, ширина полосы в наиболее узком месте равна $\sqrt{5} - 2 > 0,236$, тогда как $\sqrt{N\left(\frac{1}{b}\right)} = \frac{1}{\sqrt{N(b)}} < \frac{1}{9} < 0,236 < \sqrt{5} - 2$ и, следовательно, при подходящем натуральном n (n/b) обязательно попадет на заштрихованную полосу.

Второй случай. Пусть (b) — действительная точка. В этом случае $\sqrt{N\left(\frac{1}{b}\right)} = \frac{1}{\sqrt{N(b)}} \leq \frac{1}{10} < \frac{\sqrt{N\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-19}}{2}\right)}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{10} < 0,23 < 0,236 < \sqrt{5} - 2$ и, следовательно, при подходящем натуральном n $\left(\frac{n}{2} + \frac{n\sqrt{-19}}{2}\right)$ непременно попадет на заштрихованную полосу.

Вопрос о том, всякое ли кольцо главных идеалов является евклидовым кольцом, был поставлен Г. Хассе (¹). Из настоящей работы следует, что существуют кольца главных идеалов, не являющиеся евклидовыми кольцами.

В заключение выражаю благодарность А. Г. Курошу, И. Р. Шафаревичу и В. И. Нечаеву за замечания к этой работе.

Поступило
14 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ H. Hasse, J. f. reine u. angew. Math., 159 (1928).