

Г. И. БИРЮК

К ВОПРОСУ О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В СЛУЧАЕ ВЫРОЖДЕНИЯ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 7 IV 1954)

В работе ⁽¹⁾ мы доказали теорему существования почти периодического решения системы нелинейных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon F(t, x); \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1)$$

где $F(t, x)$ — почти периодическая функция переменной t равномерно по отношению к x , для случая, когда характеристическое уравнение

$$\text{Det} \parallel \lambda E - A \parallel = 0 \quad (2)$$

не имеет чисто мнимых корней.

Мы рассматриваем ниже вопрос о существовании почти периодического решения системы (1) в случае наличия корней с нулевыми вещественными частями. При этом предполагается, что функция $F(t, x)$ может быть представлена конечной суммой вида

$$F(t, x) = \sum_{\mu} e^{i\mu t} F_{\mu}(x),$$

где μ — постоянные вещественные числа; $F_{\mu}(x)$ — некоторые полиномы от x , причем $F_{\mu}^*(x) = F_{-\mu}(x)$.

Представим общее решение системы (1) для случая $\varepsilon = 0$ в виде $x = Bz$, где B — постоянная матрица, а z — вектор с компонентами вида $e^{\lambda_k t}$ или $P_k(t) e^{\lambda_k t}$, $\lambda_k = r_k + i\nu_k$ — корни уравнения (2), $P_k(t)$ — полиномы.

Обозначим через ν диагональную матрицу, элементами которой являются мнимые части корней λ_k .

Наличие у характеристического уравнения (2) корней с нулевыми вещественными частями требует некоторых преобразований системы (1), которые осуществляются следующими теоремами:

Теорема 1. Формальное решение системы (1) имеет вид

$$x = B e^{i\nu t} z + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k X_k(t, z),$$

где $X_k(t, z)$ представляются в виде конечных сумм $\sum_{\mu} e^{i\mu t} X_{k\mu}(z)$, а

z — формальное решение системы

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(z).$$

Теорема 2. Система уравнений (1) сводится посредством замены переменной

$$x = B e^{i \nu t} z + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k X_k(i, z)$$

к системе

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k A_k(z) + \varepsilon^{m+1} F_m(t, z, \varepsilon), \quad (3)$$

где функция $F_m(t, z, \varepsilon)$ представима в виде $\sum e^{i \nu t} F_{m \nu}(z, \varepsilon)$ и регулярна относительно ε в окрестности $\varepsilon = 0$.

Если в (3) отбросить член, зависящий от t , получим так называемую систему уравнений m -го приближения

$$\frac{d\xi}{dt} = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k A_k(\xi). \quad (4)$$

Теорема (существования). Пусть выполнены следующие условия:

1) Уравнения (4) обладают для любого фиксированного $m \geq m_0$ стационарным решением $\xi = \xi_m$, ограниченным независимо от ε ($|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$).

2) Корни характеристического уравнения

$$\text{Det} \left\| pE - \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \frac{\partial A_k}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_m} \right\| = 0,$$

соответствующего уравнениям в вариациях, составленным для системы (4), удовлетворяют условию

$$|\text{Re } p| \geq \gamma_m |\varepsilon|^q, \quad \gamma_m > 0, \quad m \geq m_0, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0, \quad (5)$$

где q — некоторое фиксированное положительное число.

Тогда, фиксируя некоторое число $\sigma > 0$, можно указать такое $\varepsilon_m(\sigma) > 0$, что при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_m(\sigma)$, $m > 2q(n+1) - 1$ — система (3) имеет единственное почти периодическое решение $z(t, \varepsilon)$, удовлетворяющее неравенству

$$|z(t, \varepsilon) - \xi_m| \leq \sigma.$$

Для доказательства теоремы точное решение z системы (3) представляется в виде

$$z = \xi_m + \eta,$$

где η — неизвестная функция, для определения которой получается система уравнений

$$\frac{d\eta}{dt} = \left(\sum_{k=0}^m \varepsilon^k \bar{A}_k \right) \eta + \Phi(\eta, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1} \bar{F}_m(t, \eta, \varepsilon).$$

Здесь $\bar{A}_0 = B^{-1}AB - i\nu$, $\bar{A}_i = \frac{\partial A_i}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_m}$ ($i = 1, 2, \dots, m$); $\Phi(\eta, \varepsilon)$ — аналитическая функция η , разложения которой начинаются членами не ниже второго порядка.

В ходе доказательства существенно используется следующая

Лемма. Для системы

$$\frac{dx}{dt} = \left(\sum_{k=0}^m \varepsilon^k \bar{A}_k \right) x + f(t), \quad (7)$$

в которой $f(t)$ — почти периодическая функция, $|f(t)| \leq M$, и корни p соответствующего характеристического уравнения удовлетворяют условию (5), можно указать единственное частное почти периодическое решение $x(t, \varepsilon)$ удовлетворяющее неравенству

$$|x(t, \varepsilon)| \leq \frac{4k_m M}{\gamma_m^{n+1}} |\varepsilon|^{-q(n+1)}, \quad (8)$$

где k_m — некоторая постоянная, зависящая только от матрицы $\sum_{k=0}^m \varepsilon^k \bar{A}_k$.

Искомое решение системы (7) можно взять в виде

$$x(t, \varepsilon) = \int_{-\infty}^t u_-(t - \tau, \varepsilon) f(\tau) d\tau + \int_{\infty}^t u_+(t - \tau, \varepsilon) f(\tau) d\tau, \quad (9)$$

где $u_-(t)$, $u_+(t)$ — частные решения однородного матричного уравнения $\frac{du}{dt} = \left(\sum_{k=0}^m \varepsilon^k \bar{A}_k \right) u$, отвечающие корням характеристического уравнения, соответственно, с $\operatorname{Re} p < 0$ и $\operatorname{Re} p > 0$, причем $u_-(0) + u_+(0) = E$.

Для доказательства основной теоремы строится последовательность приближений для решения системы (6), причем k -е приближение определяется как почти периодическое решение вида (9) системы уравнений

$$\frac{d\eta_k}{dt} = \left(\sum_{l=0}^m \varepsilon^l \bar{A}_l \right) \eta_k + \Phi(\eta_{k-1}, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1} \bar{F}_m(t, \eta_{k-1}, \varepsilon), \quad (10)$$

а в качестве нулевого приближения принимается $\eta_k = 0$.

Чтобы оценить последовательные приближения, в системе (10) производится замена

$$\eta_k = \varepsilon^{\frac{m+1}{2}} \zeta_k,$$

которая приводит эту систему к виду

$$\frac{d\zeta_k}{dt} = \left(\sum_{l=0}^m \varepsilon^l \bar{A}_l \right) \zeta_k + \varepsilon^{\frac{m+1}{2}} [\bar{\Phi}(\zeta_{k-1}, \varepsilon) + \bar{F}_m(t, \zeta_{k-1}, \varepsilon)].$$

Нетрудно заметить, что при

$$m > 2q(n+1) - 1$$

все оценки можно провести тем же способом, что и в нашей предыдущей работе (1).

Таким образом, устанавливается сходимость последовательности $\{\zeta_k\}$ при $k \rightarrow \infty$, а также единственность полученного почти периодического решения в рассматриваемой области.

В заключение выражаю глубокую благодарность акад. Н. Н. Боголюбову за руководство работой.

Поступило
25 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Г. И. Бирюк, ДАН, 96, № 1 (1954).