

Ю. М. БЕРЕЗАНСКИЙ

О СПЕКТРАЛЬНОЙ МАТРИЦЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ РАЗНОСТЯХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 18 V 1954)

В заметке ⁽¹⁾ показано, что разложение по собственным функциям уравнения в частных разностях

$$\begin{aligned} L[u]_{j,k} = & \alpha_{j-1,k} u_{j-1,k} + a_{j,k} u_{j+1,k} + b_{j,k-1} u_{j,k-1} + b_{j,k} u_{j,k+1} + \\ & + c_{j,k} u_{j,k} = \lambda u_{j,k}, \\ \alpha_{j,k} > 0, \quad \operatorname{Im} b_{j,k} = \operatorname{Im} c_{j,k} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

рассматриваемого в полуплоскости $j \geq 0$ с граничным условием

$$u_{-1,k} = 0 \quad (k = \dots, -1, 0, 1, \dots), \quad (2)$$

строится следующим образом. Обозначим через $P_q(\alpha; \lambda)$ (q в дальнейшем обозначает целочисленную точку правой полуплоскости, $\alpha = \dots, -1, 0, 1, \dots$), решение уравнения (1) с начальными условиями $P_{-1,k}(\alpha; \lambda) = 0$, $P_{0,k}(\alpha; \lambda) = \delta_{k,\alpha}$ и отнесем каждой финитной последовательности f_q ее преобразование Фурье — бесконечномерный вектор с координатами $F_\alpha(\lambda) = \sum_q f_q P_q(\alpha; \lambda)$ ($\alpha = \dots, -1, 0, 1, \dots$).

Тогда справедливо равенство Парсеваля

$$\sum_q f_q \bar{g}_q = \sum_{\alpha, \beta = -\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha(\lambda) \overline{G_\beta(\lambda)} d\tau_{\alpha, \beta}(\lambda),$$

где $\|\tau_{\alpha, \beta}(\lambda)\|_{-\infty}^{\infty} = T(\lambda)$ — некоторая неубывающая матричная функция расширения — спектральная матрица задачи (1) — (2). Обозначим через $\mathfrak{H}$ гильбертово пространство последовательностей f_q , для которых $\sum_q |f_q|^2 < \infty$, а через H — незамкнутое подпространство, состоящее из финитных последовательностей, и положим $(Af)_q = L[f]_q$ ($f_{-1,k} = 0$), $f \in H$. Каждое расширение эрмитова оператора A до самосопряженного (в $\mathfrak{H}$ или с выходом в более широкое пространство) определяет некоторую спектральную матрицу и наоборот. Задачу (1) — (2) будем называть определенной, если ей отвечает только одна спектральная матрица, т. е. если замыкание A самосопряженно; в противном случае задачу назовем неопределенной.

В этой заметке мы установим ряд результатов относительно спектральной матрицы $T(\lambda)$, аналогичных основным фактам теории степенной и матричной проблем моментов ⁽²⁻⁵⁾.

1°. В дальнейшем основным приемом изучения задачи (1) — (2) будет сведение операции L к некоторой операции в обычных разностях, действующей на последовательности бесконечномерных матриц. Кратко опишем такое сведение.

Пусть $\mathfrak{H}_0$ — гильбертово пространство последовательностей $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$, для которых $\sum_{\alpha} |x_{\alpha}|^2 < \infty$, а $H_0 \subset \mathfrak{H}_0$ — незамкнутое подпространство финитных последовательностей. Пространство $\mathfrak{H}$ можно отождествить с гильбертовым пространством последовательностей $f = (f_0, f_1, \dots)$, где $f_j \in \mathfrak{H}_0$, причем $\sum (f_j, f_j) < \infty$ и $(f, g) = \sum_j (f_j, g_j)$; именно, следует положить $f_j = (\dots, f_j, -1, f_j, 0, f_j, 1, \dots)$.

Разностная операция L запишется в виде $L[f]_j = A_{j-1}f_{j-1} + B_j f_j + A_j f_{j+1}$ ($j = 0, 1, \dots; f_{-1} = 0$), где матрицы A_j диагональны ($A_j = \|a_{j;\alpha,\beta}\|_{-\infty}^{\infty}$, $a_{j;\alpha,\beta} = a_{j,\alpha}\delta_{\alpha,\beta}$), а матрицы B_j якобиевы ($B_j = \|b_{j;\alpha,\beta}\|_{-\infty}^{\infty}$, $b_{j;\alpha,\alpha} = c_{j,\alpha}$, $b_{j;\alpha,\alpha+1} = b_{j,\alpha}$, $b_{j,\alpha} = 0$ при $|\alpha - \beta| > 1$).

Обозначим через $\mathfrak{M}$ обобщенное гильбертово пространство, состоящее из последовательностей бесконечномерных матриц $\mathfrak{u} = (U_0, U_1, \dots)$, столбцы которых входят в $\mathfrak{H}_0$ и ряд $\sum_j U_j^* U_j$ сходится*. В $\mathfrak{M}$ естественным образом вводятся операции сложения, умножения справа на финитную матрицу и обобщенное скалярное произведение $\{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\} = \sum_j U_j^* V_j$, обладающее свойствами $\{\mathfrak{u}, \mathfrak{u}\} \geq 0$, $\{\mathfrak{v}, \mathfrak{u}\} = \{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\}^*$,

$\{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2\} = \{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}_1\} + \{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}_2\}$, $\{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}C\} = \{\mathfrak{u}, \mathfrak{v}\}C$. Совокупность финитных последовательностей $(U_0, U_1, \dots)$, каждая из которых состоит из финитных матриц, обозначим через M . Очевидно, при любом $x \in H_0$, $x \neq 0$, $\mathfrak{M}x = \mathfrak{H}$, $Mx = H$ ($\mathfrak{u}x = (U_0 x, U_1 x, \dots)$). Операцию L естественно перенести на $\mathfrak{M}$, полагая $\tilde{L}[\mathfrak{u}]_j = A_{j-1}U_{j-1} + B_j U_j + A_j U_{j+1}$ ($j = 0, 1, \dots; U_{-1} = 0$), при этом $\tilde{L}[\mathfrak{u}]x = L[\mathfrak{u}x]$ ($x \in H_0$).

2°. Обозначим через $P_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots$) бесконечномерную матрицу с элементами $u_{\alpha,\beta} = P_{j,\alpha}(\beta; z)$; очевидно, $P_j(z)$ удовлетворяет уравнению $\tilde{L}[P(z)]_j = zP_j(z)$ и начальным условиям $P_{-1}(z) = 0$, $P_0(z) = E$. Преобразованием Фурье вектора $\mathfrak{u} \in M$ назовем матричную функцию $\mathfrak{u}(\lambda) = \sum_j P_j'(\lambda) U_j$; при $x \in H_0$ $\mathfrak{u}(\lambda)x = (\mathfrak{u}x)(\lambda)$, где $(\mathfrak{u}x)(\lambda)$ —

преобразование Фурье последовательности $\mathfrak{u}x \in H$. Дефектные числа оператора A могут быть подсчитаны при помощи теоремы.

Теорема 1. При любом комплексном z существует матричный предел

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^n P_j^*(z) P_j(z) \right)^{-1},$$

причем $\Gamma(z) \leq \{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}\}$ для каждого $\mathfrak{B} \in M$ такого, что $\mathfrak{B}(\bar{z}) = E$. Размерность ортогонального дополнения в $\mathfrak{H}_0$ к линейной совокупности векторов $x \in H_0$, для которых выполняются оба соотношения

$\inf (\{\mathfrak{B}, \mathfrak{B}\}x, x) = (\Gamma(z)x, x)$, $(\Gamma(z)x, x) = 0$, $\mathfrak{B} \in M$, $\mathfrak{B}(\bar{z}) = E$, (3) одна и та же для всех точек z регулярного типа оператора A и совпадает с его дефектным числом.

* Для бесконечномерной матрицы $U = \|u_{\alpha\beta}\|_{-\infty}^{\infty}$ положим $U^* = \|\overline{u_{\beta\alpha}}\|_{-\infty}^{\infty}$, $U' = \|u_{\beta,\alpha}\|_{-\infty}^{\infty}$. Последовательность матриц $U_n = \|u_{n;\alpha,\beta}\|_{-\infty}^{\infty}$ назовем сходящейся к матрице $U = \|u_{\alpha,\beta}\|_{-\infty}^{\infty}$, если $u_{n;\alpha,\beta} \rightarrow u_{\alpha,\beta}$ для каждого элемента. Будем писать $U \leq V$, если $(Ux, x) \leq (Vx, x)$ для каждого $x \in H_0$. Матрицу $U = \|u_{\alpha,\beta}\|_{-\infty}^{\infty}$ назовем финитной, если $u_{\alpha,\beta} = 0$ при достаточно большой разности $|\alpha - \beta|$. В дальнейшем мы будем отождествлять матрицу с порожденным ею оператором в $\mathfrak{H}_0$.

Если при некотором z элементы каждой из матриц $P_j(z)$ ($j=0, 1, \dots$) равномерно ограничены, то первое из соотношений (3) выполняется для всех $x \in H_0$. В случае вещественного z для выполнения этого соотношения достаточно, чтобы все элементы матриц $P_j(z)$ ($j=0, 1, \dots$) были неотрицательны.

На примерах можно показать, что, в отличие от степенной и матричной проблем моментов, первое из соотношений (3) выполняется не всегда. Из теоремы 1 могут быть выведены некоторые достаточные критерии определенности задачи.

Теорема 2. Задача (1) — (2) определена, если выполнено одно из следующих условий:

$$a) \sup_{j, k} (a_{j-1, k} + a_{j, k} + b_{j, k-1} + b_{j, k} + c_{j, k}) < \infty, \quad b_{j, k} \geq 0^*,$$

$$b) \text{ при каждом } j=0, 1, \dots \inf_k a_{j, k} > 0, \sup_k |a_{j-1, k} + a_{j, k} + b_{j, k-1} + b_{j, k} + c_{j, k}| < \infty \text{ и } \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sup_k a_{j, k}} = \infty.$$

3°. Наряду с решением $P_j(z)$ уравнения $\tilde{L}[u]_j = zU_j$ рассмотрим решение $Q_j(z)$ ($j=0, 1, \dots$) этого же уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $Q_0(z) = 0, Q_1(z) = A_0^{-1}$. Пусть $T(\lambda)$ — некоторая спектральная матрица; положим

$$M(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} dT'(\lambda) \quad (\operatorname{Im} z \neq 0);$$

в силу формулы обращения Стильеса матричная функция $M(z)$ однозначно определяет $T(\lambda)$. В определенном случае существует единственная матричная функция $L(z)$ такая, что $Q_j(z) + P_j(z)L(z) \in \mathfrak{M}$ при каждом невещественном z , и эта функция совпадает с $M(z)$. Это замечание может быть применено для нахождения $M(z)$ в конкретных примерах.

4°. Степень неопределенности задачи (1) — (2) будет максимальной, если для каждого финитного $x \neq 0$ одно из условий (3) не выполняется. Рассмотрим в некотором смысле наиболее крайний случай неопределенной задачи; именно, будем говорить, что наша задача абсолютно неопределенна, если для каждой конечной области G комплексной плоскости существует такая постоянная p_G , что

$$\left\| \sum_{j=0}^{\infty} P_j^*(z) P_j(z) \right\| \leq p_G \quad (z \in G). \quad (4)$$

В этом случае существует и ограничен $\Gamma^{-1}(z)$, причем $\Gamma^{-1}(z) = \{P(z), P(z)\} = \sum_{j=0}^{\infty} P_j^*(z) P_j(z)$, таким образом, для каждого финитного $x \neq 0$ второе из условий (3) не выполняется, первое же, в силу второй части теоремы 1, выполнено.

Используя некоторые факты теории субгармонических функций, можно показать, что оценка, аналогичная (4), имеет место и для решения $Q_j(z)$. Это позволяет построить матричные функции

$$D_0(\zeta, z) = -(\zeta - z) \sum_{j=0}^{\infty} P_j'(\zeta) P_j(\zeta), \quad D_1(\zeta, z) = E - (\zeta, z) \sum_{j=0}^{\infty} Q_j'(\zeta) P_j(\zeta),$$

$$E_0(\zeta, z) = E + (\zeta - z) \sum_{j=0}^{\infty} P_j'(\zeta) Q_j(\zeta), \quad E_1(\zeta, z) = (\zeta - z) \sum_{j=0}^{\infty} Q_j'(\zeta) Q_j(\zeta),$$

* В этом случае оператор A полуограничен сверху.

голоморфные во всей комплексной плоскости относительно каждого из переменных. Следующая теорема описывает совокупность спектральных матриц в абсолютно неопределенном случае.

Теорема 3. Пусть x — фиксированное вещественное число. В абсолютно неопределенном случае матричные функции $M(\zeta)$, отвечающие самосопряженным расширениям оператора A в $\mathfrak{H}$, находятся во взаимно-однозначном соответствии с совокупностью всех унитарных операторов U в пространстве $\mathfrak{H}_0$, причем

$$(E + U)(iE_0(\zeta, x) + D_0(\zeta, x)) + (E - U)(E_1(\zeta, x) - iD_1(\zeta, x)) = \\ = [(E + U)(iE_0(\zeta, x) - D_0(\zeta, x)) + (E - U)(E_1(\zeta, x) + iD_1(\zeta, x))] N(\zeta), \quad (5)$$

где $N(\zeta) = (M(\zeta) - iE)(M(\zeta) + iE)^{-1}$ — преобразование Кэли от $M(\zeta)$. Уравнение (5) разрешимо относительно $N(\zeta)$ (при любом унитарном U), во всяком случае, в достаточно малой окрестности точки x .

Для самосопряженных расширений с выходом в более широкое пространство сохраняются утверждения теоремы, но с заменой совокупности унитарных операторов на совокупность всех действующих в $\mathfrak{H}_0$ голоморфных в верхней полуплоскости операторных функций $U(\zeta)$, для которых $\|U(\zeta)\| \leq 1$.

Для каждой спектральной матрицы $T(\lambda)$ при любом вещественном x справедливо неравенство

$$T(x + 0) - T(x) \leq \Gamma(x)^*, \quad (6)$$

причем эта оценка точная: в случае абсолютно неопределенной задачи неравенство (6) переходит в равенство для спектральной матрицы $T_x(\lambda)$, получаемой из (5) при $U = E$.

Приведем одно достаточное условие абсолютной неопределенности.

Теорема 4. Если $\sup_k a_{j,k} < \infty$ ($j = 0, 1$), $\sup_{j,k} |b_{j,k}| < \infty$,

$\sup_{j,k} |c_{j,k}| < \infty$ и $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\inf_k a_{j,k}} < \infty$, $\log a_{j,k} \geq \frac{1}{2} [\log a_{j-1,k} + \log a_{j+1,k}]$ ($k = \dots, -1, 0, 1, \dots; j = 1, 2, \dots$), то задача (1) — (2) абсолютно неопределенна.

В заключение автор выражает глубокую благодарность чл.-коор. АН УССР М. Г. Крейну за ценные советы, которые способствовали получению приведенных выше результатов.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
8 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Ю. М. Березанский, ДАН, 93, № 1 (1953). ² Н. И. Ахизер, Усп. матем. наук, 9 (1941). ³ М. Г. Крейн, М. А. Красносельский, Усп. матем. наук, 2, № 3 (19) (1947). ⁴ М. Г. Крейн, ДАН, 69, № 2 (1949). ⁵ М. Г. Крейн, Украинск. матем. журн., № 2 (1949).

* Мы предполагаем, что спектральная матрица нормирована условиями $T(\lambda - 0) = T(\lambda)$, $T(0) = 0$.