

Бл. ДОЛАПЧИЕВ

О ПРИБЛИЖЕННОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВИХРЕВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 17 VII 1954)

1. Как известно, формула Кармана ⁽¹⁾

$$R_x = \rho \Gamma \left[\kappa (U - 2u^*) + \frac{\Gamma}{4\pi l} \right] \quad (\kappa = \frac{h}{l}) \quad (1)$$

для определения вихревого сопротивления кругового цилиндра, обтекаемого с небольшими скоростями жидкостью перпендикулярно его образующим, не поддается использованию чисто теоретически, так как из шести постоянных величин, фигурирующих в ней, две даны по условию, другие две определяются теоретически, а остальные две отыскиваются опытным путем.

Первыми двумя постоянными являются: 1) плотность ρ жидкости, которая предполагается однородной; 2) скорость U обтекания цилиндра, или, что то же, скорость передвижения его в жидкости, когда последняя находится в покое.

Между остальными четырьмя неизвестными постоянными: 3) циркуляцией Γ , одной и той же по величине для любого дискретного вихря из образовавшейся позади цилиндра вихревой дорожки; 4) скоростью u^* последней относительно цилиндра, где $u^* < U$; 5) шириной $2h$ дорожки, т. е. расстоянием между обеими параллельными вихревыми цепочками, и 6) расстоянием $2l$ между любыми двумя соседними вихрями одной и той же цепочки, существуют зависимости:

а) для скорости u_s^* симметричной дорожки

$$u_s^* = \frac{\Gamma}{4l} \coth(\kappa\pi), \quad (2)$$

или для скорости u_z^* шахматной дорожки

$$u_z^* = \frac{\Gamma}{4l} \operatorname{th}(\kappa\pi); \quad (3)$$

б) для устойчивого равновесия последней, определяемого условием

$$\operatorname{ch}(\kappa\pi) = \sqrt{2}, \text{ или } \operatorname{sh}(\kappa\pi) = 1, \quad (4)$$

или значением параметра κ дорожки

$$\kappa = h/l \approx 0,2805. \quad (5)$$

Исключение Γ и h при помощи (3), (4) и (5) приводит к формуле:

$$R_x = 2\rho l U^2 V(0,794 - 0,314 V), \quad (6)$$

в которой $V = u_z^*/U$ и l остаются неизвестными, вследствие чего они должны быть найдены опытным путем. То же самое относится и к Γ и h в том случае, когда мы предварительно исключили u^* и l .

То обстоятельство, что одни из неизвестных величин в формуле (1) отыскиваются теоретически, а другие опытным путем, делает ее неудобной для использования, несмотря на то, что допускаемая при применении этого смешанного теоретически-опытного способа для определения вихревого сопротивления ошибка не превышает 3%.

2. Для преодоления указанного выше недостатка А. Космодемьянский ⁽²⁾ выдвигает следующие две гипотезы, которые дают ему возможность теоретически определить, хотя и приближенно, циркуляцию Γ .

а) Исходя из того, что ширина дорожки пропорциональна расстоянию между точками отрыва вихрей от цилиндра, он принимает, что она точно равна диаметру цилиндра, т. е.

$$2h = 2a. \quad (7)$$

б) Так как относительная скорость первой вихревой пары (ближайшей к цилиндру) постоянно растет, причем растет и ее циркуляция, Космодемьянский принимает, что они становятся наибольшими именно там, где вертикальная компонента скорости становится равной нулю. Расстояние между вихрями пары в этом месте должно определять, согласно этому второму допущению, ширину вихревой дорожки.

Если комплексный потенциал течения цилиндр—вихревая пара

$$F(z) = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{\Gamma i}{2\pi} \ln \frac{(z - z_1) \left(z - \frac{a^2}{z_1} \right)}{(z - \bar{z}_1) \left(z - \frac{a^2}{\bar{z}_1} \right)}, \quad (8)$$

а комплексную скорость, например верхнего вихря пары $(z_1, \bar{z}_1)$, определим из выражения $\left(\frac{dF}{dz} \right)_{z=z_1}$, которое, если опустить индекс 1, имеет вид:

$$w(z) = U \frac{z^2 - a^2}{z^2} - \frac{\Gamma i}{2\pi} \left(\frac{1}{z - z} + \frac{\bar{z}}{z^2 - a^2} - \frac{z}{z^2 - a^2} \right), \quad (9)$$

то требования второй гипотезы Космодемьянского представляются:

$$\operatorname{Im} w(z) = 0, \quad \frac{d}{dr} \operatorname{Re} w(z) = 0. \quad (10)$$

3. Вследствие того, что первая гипотеза ($2h = 2a$) представляет сильно ограниченную гидродинамическую картину течения, тесно связывающую первую вихревую пару с образовавшейся за цилиндром вихревой дорожкой, ширина которой равна именно расстоянию между вихревыми центрами этой пары, в настоящем сообщении мы хотим показать, при каком режиме вихреобразования и при какой последующей вихревой конфигурации допустима эта гипотеза.

С этой целью сделаем следующее дополнительное допущение ко второй гипотезе. Раз первая вихревая пара, непосредственно связанная и с цилиндром и с вихревой дорожкой, характеризует ширину, циркуляцию и скорость последней в тот момент, в который действительны требования (10), и является все еще симметричной относительно оси течения, то и сама дорожка должна быть также только симметричной. Это означает, что она образуется путем попарно-симметричного отрывания вихревых пар, которые на своем пути между цилиндрами и их крайними положениями, характеризующимися (10), или не были смещены или же претерпели симметричные смещения относительно той же оси, как это показано Фейнлем ⁽³⁾. Как известно, однако, в действительности чаще всего эти смещения не симметричны, вследствие чего еще начальная вихревая пара «опрокидывается», уступая место такому несимметрично-маятникообразному отрыванию вихревых пар от цилиндра, при котором между последним и образу-

щейся таким образом шахматной дорожкой обнаруживается такая кильватерная зона, которая вызывает выталкивание вихрей пары наружу и, следовательно, расширение вихревой дорожки, превосходящее диаметр цилиндра. Для реальных жидкостей этому расширению способствует и диффузия жидкости (4).

Итак, наше дополнение состоит в том, что мы допускаем существование симметричной, а не шахматной дорожки позади цилиндра, скорость которой равна именно максимальной горизонтальной относительной скорости начальной симметричной пары, являющейся первой вихревой парой. Таким образом, наряду с (10) мы имеем зависимость

$$\text{Re} w(z) = u_s^*. \quad (11)$$

Предстоит установить, каким должен быть параметр κ симметричной дорожки позади цилиндра, относительно которой мы сделали упомянутое выше допущение.

На основании (7), (10) Космодемьянский получает для величины r^2 (где r — радиус-вектор любого вихря рассматриваемой пары в момент отрыва ее от цилиндра) кубическое уравнение ($s = r^2$)

$$s^3 - 7a^4s + 2a^6 = 0, \quad (12)$$

имеющее для корня больше a^2 приближенное значение

$$s = r^2 \approx 2,5 a^2. \quad (13)$$

Но наше дополнительное требование, согласно (11), дает нам

$$[\text{Re} w(z)]_{\max} = U \frac{r^4 - a^4}{r^2(r^2 + 2a^2)} = U \frac{2a^2\lambda r^4 - a^4}{r^4 r^2 + 2a^2} = u_s^*, \quad (14)$$

где максимум в левой стороне следует из уравнений (10), из которых исключена циркуляция

$$\gamma = \frac{\Gamma}{2\pi} = \frac{U}{2h} \frac{r^2 - a^2}{r^4} a^2, \quad a^2 = (r^2 - a^2)^2 - (2ah)^2, \quad (15)$$

а для u_s^* использовано (2), представленное в виде

$$u_s^* = \gamma \frac{\lambda}{2h}, \quad \lambda = (\kappa\pi) \coth(\kappa\pi), \quad (16)$$

принимая во внимание снова (15). Вследствие того, что $r = a$ соответствует минимуму скорости вихрей первой пары, зависимость (14) дает

$$r^2 = 2a^2\lambda. \quad (17)$$

Из (13) и (17) получаем для λ приближенно величину $5/4$. Параметр κ определяется, следовательно, из трансцендентного уравнения

$$(\kappa\pi) \coth(\kappa\pi) = 1,25. \quad (18)$$

Положив для краткости $\kappa\pi = \mu$ и приняв во внимание, что разложение

$$\mu \coth \mu = 1 + \frac{B_2}{2!} (2\mu)^2 + \frac{B_4}{4!} (2\mu)^4 + \dots = 1 + \frac{\mu^2}{3} - \frac{\mu^4}{45} + \dots \quad (19)$$

действительно для $\mu^2 < \pi^2$, в данном случае для $\mu^2 < 1$, находим, что (18) имеет приближенный корень $\mu = \kappa\pi \approx 0,88$, откуда $\kappa = h/l \approx 0,280$.

Мы нашли, что если создаваемая согласно условиям (10), (11) симметричная вихревая дорожка, получаемая путем попарно-симметричного отрыва вихревых пар, имеет ширину диаметра цилиндра, то она обладает кармановым параметром, равным параметру (5) стабильной шахматной вихревой дорожки.

Теперь легко следует обратное, а именно — если принять такой режим вихреобразования, при котором симметричная вихревая дорожка, следующая за первой вихревой парой, для которой действи-

тельны требования (10), (11), укладывается по кармановому параметру (5), то ее ширина становится точно равной диаметру цилиндра. Действительно, из условия (10) для искомой ширины находим:

$$(2h)^2 = \frac{(r^2 - a^2)^2}{a^2 r^2} (r^2 + 2a^2). \quad (20)$$

Но из (11) мы нашли, что $r^2 = 2a^2\lambda$, откуда (20) переходит в

$$(2h)^2 = a^2 \frac{\lambda + 1}{\lambda} (2\lambda - 1), \quad (21)$$

что вследствие второго равенства (16) представляет явно зависимость между шириной дорожки и ее параметром.

Наше предварительное допущение (4), (5) дает нам значение

$$\lambda = (\kappa\pi) \frac{\operatorname{ch}(\kappa\pi)}{\operatorname{sh}(\kappa\pi)} \approx 0,281 \sqrt{2} \pi \approx 1,25; \quad (22)$$

внеся последнее в (21), получаем приближенно

$$2h \approx 2,0125a \approx 2a, \quad (23)$$

что и требовалось доказать.

Итак, допустив, что вихревые пары отрываются от цилиндра парно-симметрично (т. е. не претерпевают никаких смещений или претерпевают только симметричные смещения) с вертикальной относительной скоростью, равной нулю, и горизонтальной максимальной скоростью, равной скорости образующейся таким образом симметричной вихревой дорожки с тем же параметром, каким является параметр кармановой стабильной улицы, то тогда и только тогда ширина ее равна диаметру цилиндра.

4. Для циркуляции Γ получаем из (15) выражение:

$$\Gamma = 2\pi\gamma = \frac{\pi U}{h} \frac{r^2 - a^2}{r^4} [(r^2 - a^2)^2 + (2ah)^2], \quad (24)$$

которое после подстановки $r^2 = 2,5a^2$ и $h = a$ дает

$$\Gamma \approx 4,71 aU, \quad (25)$$

приближение, полученное и Космодемьянским. Более точное значение Γ , полученное для большего числа вихревых пар, достигает, согласно вычислениям Космодемьянского, $4,83aU$.

Приняв, как это сделано в исследованиях Рубаха (5), $a = 3,5$ см за единицу меры, а скорость $U = 2,6$ м/сек, получим для Γ значения:

I приближение (одна вихревая пара)	$\Gamma = 4,71 U = 12,25$
II приближение (несколько вихревых пар)	$\Gamma = 4,83 U = 12,55$
Из фотографических измерений	$\Gamma = 12,73$

Из вышеприведенного следует, что, когда не требуется большой точности, введенные гипотезы и приближенная постановка задачи, при которой рассматривается одна единственная вихревая пара, связанная с цилиндром, приводят нас к удовлетворительному результату.

Для использования формулы (1) стабильная шахматная дорожка с параметром $\kappa = 0,280$ может быть заменена нестабильной симметричной дорожкой с тем же параметром и шириной $2h = 2a$.

Математический институт
София, Болгария

Поступило
30 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Th. Kármán, Gött. Nachr., 509 (1911—1912). ² А. Космодемьянский, Уч. зап. МГУ, 7 (1937); 6 (1940). ³ L. Föopl, Sitzungsber. d. Bayr. Acad. d. Wiss. (1913). ⁴ G. Birkhoff, J. Appl. Phys., 24, № 1 (1953). ⁵ H. Rubach, Verb. deutsch. Ing., № 185 (1916).