

Г. Ц. ТУМАРКИН

**УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ,
ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ СХОДИМОСТЬ МОДУЛЕЙ**

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 VII 1954)

В работе указываются некоторые классы аналитических в области G функций, для которых равномерная сходимость последовательности $\{f_n(z)\}$ внутри G к $f(z)$ и сходимость по мере на множестве $E, mE > 0$, последовательности $\{|f_n(\zeta)|\}$ модулей граничных значений $f_n(z)$ к $|f(\zeta)|$ — модулю граничных значений $f(z)$ являются условиями, необходимыми и достаточными для сходимости по мере на E последовательности $\{f_n(\zeta)\}$ *.

Теорема 1. Пусть $\{f_n(z)\}$ — последовательность функций, равномерно ограниченных в $|z| < 1$:

$$|f_n(z)| \leq M, \quad |z| < 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Тогда для сходимости по мере на множестве $E, mE > 0$, последовательности $\{f_n(e^{i\theta})\}$ — граничных значений $f_n(z)$ необходимо и достаточно, чтобы:

I. Последовательность $\{f_n(z)\}$ равномерно сходилась в круге $|z| < 1$.

II. $\{|f_n(e^{i\theta})|\}$ сходилась по мере на E к $|f(e^{i\theta})|$, где $f(e^{i\theta})$ — граничные значения $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$.

Доказательство. Необходимость условия II очевидна, а условия I следует немедленно из теоремы А. Я. Хинчина и А. Островского (см., например, (1)).

Докажем достаточность. По теореме С. Я. Хавинсона ((1), гл. II, п. 14.2) при выполнении условий (1) и I теоремы для любой суммируемой функции $\omega(\theta)$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f_n(e^{i\theta}) \omega(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \omega(\theta) d\theta. \quad (2)$$

При доказательстве можно считать, что $f(e^{i\theta}) \neq 0$ почти всюду на E , так как в противном случае по теореме единственности $f(z) \equiv 0$ и теорема очевидна. Теперь при любом $\varepsilon > 0$ найдется множество $E_1 \subset E, mE_1 > mE - \varepsilon$, такое, что

$$|f(e^{i\theta})| > \lambda \quad \text{при } \theta \in E_1, \quad (3)$$

где λ — некоторое число > 0 .

* В нашей заметке (2) рассматривался подобный же вопрос, но при этом заранее не требовалось, чтобы пределом $\{|f_n(\zeta)|\}$ была функция $|f(\zeta)|$.

Положим

$$\omega(\theta) = [f(e^{i\theta})]^{-1} \text{ при } \theta \in E_1; \\ \omega(\theta) = 0 \text{ при } \theta \in CE_1.$$

Из (2) для нашей $\omega(\theta)$ имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_1} f_n(e^{i\theta}) [f(e^{i\theta})]^{-1} d\theta = mE_1. \quad (4)$$

Из (1), (3) и II получаем, что последовательность $\{|f_n(e^{i\theta})[f(e^{i\theta})]^{-1}|\}$ равномерно ограничена на E_1 и сходится по мере на E_1 к 1.

Отсюда и из (4) легко показать, что $\{f_n(e^{i\theta})[f(e^{i\theta})]^{-1}\}$ сходится по мере к 1, откуда делаем заключение о сходимости по мере на E_1 $\{f_n(e^{i\theta})\}$ к $f(e^{i\theta})$. Но ε произвольно, поэтому $\{f_n(e^{i\theta})\}$ сходится по мере к $f(e^{i\theta})$ на E .

Замечание. Если требовать вместо условия II одну лишь сходимость $\{|f_n(e^{i\theta})|\}$, не требуя а priori того, что пределом будет $|f(e^{i\theta})|$, то сходимости $\{f_n(e^{i\theta})\}$ может и не быть. Пример: $\{z^n\}$.

Распространим теорему 1 на более общие классы функций.

Лемма. Пусть $\{\psi_n(x)\}$ есть последовательность функций равностепенно абсолютно непрерывных при $0 \leq x \leq 2\pi$.

Тогда, если: 1) $\{\psi_n(x)\}$ сходится к $\psi(x)$ при всех x , $0 \leq x \leq 2\pi$; 2) $\{\psi'_n(x)\}$ сходится по мере на множестве E , то пределом $\{\psi'_n(x)\}$ будет являться $\psi'(x)$.

Теорема 2. Если последовательность $\{f_n(z)\}$ функций класса D^* такова, что $\left\{\int_0^x \ln^+ |f_n(e^{i\theta})| d\theta\right\}$ есть последовательность равностепенно абсолютно непрерывных функций, то для сходимости $\{f_n(e^{i\theta})\}$ на множестве E , $mE > 0$, необходимо и достаточно выполнение условий I и II теоремы 1.

Доказательство. Необходимость показывается так же, как в теореме 1.

Для доказательства достаточности воспользуемся параметрическим представлением функций класса D :

$$f_n(z) = b_n(z) e^{i\lambda_n} \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \ln |f_n(e^{i\theta})| d\theta \cdot \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} dq_n(\theta); \quad (5)$$

здесь $b_n(z)$ — произведение Бляшке для нулей $f_n(z)$; λ_n — действительное число; $q_n(\theta)$ — невозрастающая функция с производной, равной нулю почти для всех θ .

Положим

$$f_n^*(z) = \exp \left(-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \ln^+ |f_n(e^{i\theta})| d\theta \right), \quad f_n^{**}(z) = f_n(z) f_n^*(z). \quad (6)$$

Тогда из (6) и (5) получаем:

$$|f_n^*(z)| \leq 1; \quad |f_n^{**}(z)| \leq 1 \quad \text{при } |z| < 1. \quad (7)$$

Выберем теперь из $\{f_n^*(z)\}$ подпоследовательность $\{f_{n_k}^*(z)\}$, равномерно сходящуюся в $|z| < 1$, и пусть $\lim_{n_k \rightarrow \infty} f_{n_k}^*(z) = f^*(z)$.

Докажем прежде всего, что $\{f_{n_k}^*(e^{i\theta})\}$ сходится по мере к $f^*(e^{i\theta})$ на E . Для этого по теореме 1 достаточно доказать сходимость на E $\{|f_{n_k}^*(e^{i\theta})|\}$ к $|f^*(e^{i\theta})|$. Чтобы убедиться в последнем, заметим, что

* По поводу функций класса D см., например, (1), гл. II, § 6.

по (6) функции $u_n(z) = \ln |f_n^*(z)|$ будут гармоническими в круге $|z| < 1$, представимыми при помощи интеграла Пуассона — Лебега:

$$u_n(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)} u_n(e^{i\theta}) d\theta, \quad (8)$$

где $u_n(e^{i\theta}) = -\ln^+ |f_n(e^{i\theta})|$.

Используя условие теоремы (8), получаем, что $\left\{ \int_0^x u_n(e^{i\theta}) d\theta \right\}$

есть последовательность функций, равномерно абсолютно непрерывных. Заметим, что $\{u_n(z)\}$ равномерно сходится в $|z| < 1$ к $\ln |f^*(z)|$. Применяя тогда к $\{u_{n_k}(z)\}$ теорему Г. М. Фихтенгольца (3), получаем, что при всех x , $0 \leq x \leq 2\pi$, последовательность $\left\{ \int_0^x u_{n_k}(e^{i\theta}) d\theta \right\}$ будет сходиться к $\int_0^x u(e^{i\theta}) d\theta$, где $u(e^{i\theta}) = \ln |f^*(e^{i\theta})|$. Так как по условию теоремы $\{|f_n(e^{i\theta})|\}$ сходилась на E по мере, то на E будет иметь место сходимость $\{\ln^+ |f_{n_k}(e^{i\theta})|\}$, а следовательно, по (8), последовательности $\{u_{n_k}(e^{i\theta})\}$. Применяя, наконец, к последовательности $\left\{ \int_0^x u_{n_k}(e^{i\theta}) d\theta \right\}$ лемму, получаем, что на E

$\{u_{n_k}(e^{i\theta})\}$ сходится к $u(e^{i\theta})$, поэтому $\{|f_{n_k}^*(e^{i\theta})|\}$ будет сходиться к $|f^*(e^{i\theta})|$. Отсюда же, как мы видели, следует сходимость по мере на E $\{f_{n_k}^*(e^{i\theta})\}$ к $f^*(e^{i\theta})$. Рассмотрим теперь $\{f_{n_k}^*(z)\}$. Эта последовательность, как непосредственно видно из (6), будет равномерно сходиться в круге $|z| < 1$ к $f^*(z) = f(z)f^*(z)$. По условию $\{|f_n(e^{i\theta})|\}$ сходилась по мере на E к $|f(e^{i\theta})|$, а по доказанному уже $\{|f_{n_k}^*(e^{i\theta})|\}$ сходится на E к $|f^*(e^{i\theta})|$. Поэтому, принимая во внимание равенство $|f_{n_k}^*(e^{i\theta})| = |f_{n_k}(e^{i\theta})| |f_{n_k}^*(e^{i\theta})|$, получаем, что $\{|f_{n_k}^*(e^{i\theta})|\}$ сходится по мере на E к $|f^*(e^{i\theta})| = |f(e^{i\theta})| |f^*(e^{i\theta})|$. Воспользовавшись еще раз теоремой 1, будем иметь, что $\{f_{n_k}^*(e^{i\theta})\}$ сходится по мере на E к $f^*(e^{i\theta}) [f^*(e^{i\theta})]^{-1} = f(e^{i\theta})$. Так как предельная функция не зависит от выбранной последовательности $\{f_{n_k}(e^{i\theta})\}$, то сходимость по мере на E будет иметь место для всей последовательности $\{f_n(e^{i\theta})\}$.

Теорема 3. Пусть в области G , ограниченной спрямляемой кривой γ , дана последовательность $\{f_n(z)\}$ аналитических функций класса E_δ , такая, что

$$\int_\gamma |f_n(\zeta)|^8 |d\zeta| < C < \infty, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда для сходимости по мере $\{f_n(\zeta)\}$ на множестве E , $mE > 0$, необходимо и достаточно, чтобы:

I. $\{f_n(z)\}$ равномерно сходилась внутри G .

II. $\{|f_n(\zeta)|\}$ сходится по мере на E к $|f(\zeta)|$, где $f(\zeta)$ — граничные значения $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$.

Для круга эта теорема есть следствие теоремы 2. Общий случай получается конформным отображением.

Поступило
1 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, изд. 2-е, 1950. ² Г. Ц. Тумаркин, ДАН, 83, № 5 (1952). ³ Г. М. Фихтенгольц, С. Р., 184, 1370 (1927).