

В. М. ЗОЛОТАРЕВ

**ВЫРАЖЕНИЕ ПЛОТНОСТИ УСТОЙЧИВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
С ПОКАЗАТЕЛЕМ α , БОЛЬШИМ ЕДИНИЦЫ, ЧЕРЕЗ ПЛОТНОСТЬ
С ПОКАЗАТЕЛЕМ $\frac{1}{\alpha}$**

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 VII 1954)

Логарифм характеристической функции $f(t)$ устойчивого распределения $F(x)$ дается формулой (см., например, ⁽¹⁾, стр. 177):

$$\log f(t) = i\gamma t - c|t|^\alpha \{1 + i\beta\omega(\alpha, |t|)\}, \quad (1)$$

где $0 < \alpha \leq 2$; $-1 \leq \beta \leq 1$; γ — любое вещественное число, $c \geq 0$; $\omega(\alpha, |t|) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha$, если $\alpha \neq 1$; $\omega(1, |t|) = \frac{2}{\pi} \log |t|$ *. Представляет интерес только случай $c > 0$, так как $c = 0$ соответствует несобственному распределению. При помощи линейного преобразования переменного в функции распределения $F(x)$ можно добиться того, чтобы параметры c , γ приняли значения $c = 1$ и $\gamma = 0$. Плотность такого «приведенного» распределения после небольших преобразований формулы обращения можно записать в виде

$$p(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-t^\alpha} \cos(xt + \beta\omega(\alpha, t)t^\alpha) dt. \quad (2)$$

Отсюда видно, что

$$p(x, \alpha, \beta) = p(-x, \alpha, -\beta). \quad (3)$$

В силу этого свойства достаточно изучить плотность $p(x, \alpha, \beta)$ для значений x определенного знака (при любых значениях β) или для значений β определенного знака и любых значений x .

Теорема 1. Пусть $v = -\beta \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha$ и $a_v = (1 + v^2)^{1/2} \alpha$; тогда для любых $\alpha > 1$, $-1 \leq \beta \leq 1$, $x > 0$ имеет место равенство

$$a_v x p(-a_v x, \alpha, \beta) = a_v^{-\alpha} x^{-\alpha} p\left(a_v^{-\alpha} x^{-\alpha}, \frac{1}{\alpha}, \tilde{\beta}\right), \quad (4)$$

где $\tilde{v} = -\tilde{\beta} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\alpha}$ и $\tilde{\beta} = \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\alpha}\right)^{-1} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\alpha} \left[\frac{2}{\pi} \arctg v + (\alpha - 1)\right]$.

* В отличие от формулы, приводимой в ⁽¹⁾, мы изменили знак $\omega(\alpha, |t|)$ при $\alpha \neq 1$. При таком обозначении предельные распределения для сумм независимых неотрицательных случайных величин соответствуют $\beta = 1$, в то время как в обозначениях ⁽¹⁾ они соответствуют $\beta = -1$ для $\alpha \neq 1$ и $\beta = 1$ для $\alpha = 1$.

Доказательство. Введем функции

$$u_{\alpha, \nu}(x) = \int_0^{\infty} \exp \{-itx - (1 - i\nu)t^{\alpha}\} dt \quad (\alpha \neq 1); \quad (5a)$$

$$u_{\alpha, \beta}^*(z) = \int_0^{\infty} \exp \{it - zt^{\alpha}\} dt \quad (\alpha \neq 1, \operatorname{Re} z > 0). \quad (5b)$$

Сравнение (5a) и (5b) с формулой (2) показывает, что

$$\pi p(-x, \alpha, \beta) = \operatorname{Re} u_{\alpha, \nu} \quad (\alpha \neq 1); \quad (6a)$$

$$\pi x p(x, \alpha, \beta) = \operatorname{Re} u_{\alpha, \nu} \left(\frac{1 - i\nu}{x^{\alpha}} \right) \quad (\alpha \neq 1, x > 0). \quad (6b)$$

Покажем, что при $\alpha > 1$ поворот контура интегрирования в (5a) на угол $\theta = -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \nu \right) \left(-\pi < -\frac{\pi}{2} \frac{1}{\alpha} (3 - \alpha) \leq \theta \leq -\frac{\pi}{2} \frac{1}{\alpha} (\alpha - 1) < 0 \right)$

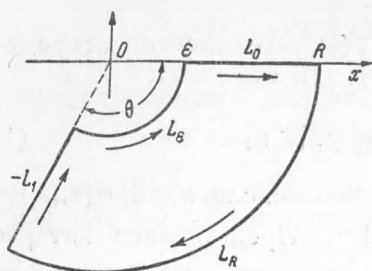


Рис.

не меняет значения интеграла. Условимся записывать значение интеграла (5a) по любому контуру C через I_C .

Пусть $L = L_{\epsilon} + L_0 - L_1 + L_R$ контур, изображенный на рис. 1 (направление L_1 составляет с положительной осью x угол θ). По теореме Коши

$$I_L = I_{L_{\epsilon}} + I_{L_0} - I_{L_1} + I_{L_R} = 0.$$

Интеграл $I_{L_{\epsilon}} \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$, так как подынтегральная функция остается ограниченной вблизи нуля. Интеграл $I_{L_R} \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, так как при подходящем выборе положительных постоянных δ и C модуль подынтегральной функции мажорируется функцией $C \exp \{-\delta R\}$. После поворота контура интегрирования на угол θ в (5a) и интегрирования по частям получаем

$$u_{\alpha, \nu}(x) = -\frac{i}{x} + \frac{1}{x} \int_0^{\infty} \exp \left\{ iu - \frac{x}{a_{\nu}} e^{i \left(\frac{1}{\alpha} \arctg \nu + \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right)} u^{1/\alpha} \right\} du. \quad (7)$$

Выберем теперь $\tilde{\nu} = -\tilde{\beta} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\alpha}$ так, чтобы $-\arctg \tilde{\nu} = \frac{1}{\alpha} \arctg \nu + \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right)$ и $|\tilde{\beta}| \leq 1$. Это всегда можно сделать, поскольку $-\frac{\pi}{2} \frac{1}{\alpha} \leq -\frac{\pi}{2} \frac{1}{\alpha} (3 - 2\alpha) < \frac{1}{\alpha} \arctg \nu + \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\alpha} < \frac{\pi}{2}$.

Равенство (7) позволяет выразить функцию $u_{\alpha, \nu}$ через $u_{1, \tilde{\nu}}$:

$$a_{\nu} x i u_{\alpha, \nu}(a_{\nu} x) = u_{1, \tilde{\nu}}^* \left(\frac{1 - i\tilde{\nu}}{(a_{\nu} x)^{1/\alpha}} \right) - i.$$

Это соотношение совместно с (6a) и (6b) доказывает теорему. Функция $p(x, \alpha, \beta)$ при фиксированных значениях α и β естественно распадается на две ветви: положительную (при $x > 0$) и отрицательную (при $x < 0$). Отнесем положительной ветви точку с координатами (α, β) в квадрате I и отрицательной ветви — точку с теми же координатами в квадрате II (см. рис. 2).

Связь между ветвями функции $p(x, \alpha, \beta)$ при $\alpha > 1$ и $\alpha < 1$, установленную формулой (4), можно наглядно представить себе как точечное отображение правых половин квадратов I и II в левые половины тех же квадратов. При этом область H квадрата II отображается на область $\tilde{H}$ квадрата I по формулам (4):

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{\alpha}, \quad \tilde{\beta} = \\ = \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\alpha} \right)^{-1} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\alpha} \left[\frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \gamma + (\alpha - 1) \right]$$

(на рис. 2 показаны образы линий области H , задаваемых уравнениями $\beta = -1, -1/2, 0, 1/2, 1$). Квадрат II со всеми деталями деления его на области получается из квадрата I отражением относительно оси α ; $\tilde{G}$ — образ G .

Формулы (3) и (4) позволяют сводить изучение устойчивых законов с показателями $\alpha > 1$ к изучению устойчивых законов с показателями $\alpha < 1$. Приведем несколько примеров.

1°. Из асимптотического разложения плотности $p(x, \alpha, 1)$ в нуле для $\alpha < 1$, принадлежащего Ю. В. Линнику (2) и И. А. Ибрагимову, можно получить следующее асимптотическое разложение плотности $p(x, \alpha, 1)$ для $\alpha > 1$ при $x \rightarrow -\infty$ (первый член этого разложения был найден А. В. Скороходом (3)):

$$p(x, \alpha, 1) \sim |x|^{-1} \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi} \sigma(x, \alpha)} e^{-(\alpha-1)\sigma(x, \alpha)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\alpha) (\sigma(x, \alpha))^{-n} \right],$$

где $\sigma(x, \alpha) = \frac{1}{\alpha-1} \left[\alpha^{-\alpha} \cos \frac{\pi}{2} (2-\alpha) |x|^{\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}$ и $a_n(\alpha)$ — рациональная функция α .

2°. Из формулы

$$p(x, 2/3, 1) = \sqrt{\frac{3}{\pi}} x^{-1} e^{-16/27/x^2} W_{1/2, 1/6}(32/27/x^2)$$

$W_{h,m}(x)$ — функция Уиттекера), найденной Поллардом (4), при помощи равенства (4) получаем новые формулы:

$$p(x, 3/2, 1) = -\sqrt{\frac{3}{\pi}} x^{-1} e^{x^2/27} W_{1/2, 1/6}(-2/27 x^3) = \\ = 1/6 \sqrt{\frac{3}{\pi}} x^{-1} e^{x^2/27} W_{-1/2, 1/6}(2/27 x^3),$$

$$p(x, 2/3, 0) = \sqrt{\frac{3}{\pi}} |x|^{-1} e^{-2/27/x^2} W_{1/2, 1/6}(4/27/x^2).$$

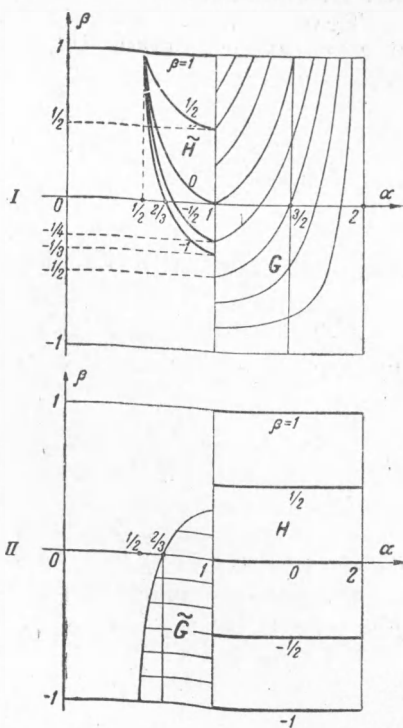


Рис. 2

При изучении устойчивых законов может оказаться полезной также следующая теорема, являющаяся обобщением теоремы 3 работы ⁽²⁾ Ю. В. Линника.

Теорема 2. Если показатель устойчивого закона $\alpha = m/n < 1$ рациональное число, $(m, n) = 1$, то плотность $p(x, \alpha, \beta)$ является действительной частью функции $V(x)$, удовлетворяющей уравнению

$$\xi^n \frac{d^{n-1} \tau}{d\xi^{n-1}} = i^m (i\nu - 1)^n \left(\xi^{1+\frac{n}{m}} \frac{d}{d\xi} \right)^{m-1} \left(\xi^{1+\frac{n}{m}} \tau(\xi) \right) + i(-1)^{n-1} \frac{n!}{\pi m}; \quad (8)$$

здесь $x = \frac{m}{n} \xi^{-\frac{n}{m}}$ и $V(x) = \xi^{1+\frac{n}{m}} \tau(\xi)$.

Для значений $\beta_k = \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \frac{m}{n} \right)^{-1} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \left(\frac{m}{2} - k \right)$ ($k = 0, 1, \dots, m$) это уравнение упрощается и принимает вид

$$\xi_k^n \frac{d^{n-1} \chi}{d\xi_k^{n-1}} = (-1)^k \left(\xi_k^{1+\frac{n}{m}} \frac{d}{d\xi_k} \right)^{m-1} \left(\xi_k^{1+\frac{n}{m}} \chi(\xi_k) \right); \quad (9)$$

здесь $\xi_k = -\xi \cos \frac{\pi}{n} \left(\frac{m}{2} - k \right)$ и $p(x, \alpha, \beta_k) = \xi_k^{1+\frac{n}{m}} \chi(\xi_k)$ ($k = 0, 1, \dots, m$).

Решая уравнения (8) и (9), нетрудно получить явные выражения для $p(x, 1/2, \beta)$ и $p(x, 1/3, 1)$, именно:

$$p(x, 1/3, 1) = \frac{1}{\pi \sqrt{3}} \left(\frac{2}{3x} \right)^{1/2} K_{1/2} \left[\sqrt{3}^{1/2} \left(\frac{2}{3x} \right)^{1/2} \right]$$

($K_{1/2}(x)$ — функция Макдональда). Эта формула была найдена ранее Н. В. Смирновым.

$$p(x, 1/2, \beta) = \operatorname{Re} \frac{z}{\pi x} \{ \sqrt{\pi} e^{-z^2} - 2i w(z) \} \quad (x > 0),$$

где

$$w(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{t^2} dt, \quad z = \frac{(1+\beta) - i(1-\beta)}{2\sqrt{2x}}.$$

При $\beta = 0$ плотность $p(x, 1/2, 0)$ выражается через хорошо изученные интегралы Френеля. Все приводившиеся специальные функции табулированы (для функции $w(z)$ недавно появились таблицы К. А. Карпова ⁽⁵⁾).

Приношу глубокую благодарность Е. Б. Дынкину за помощь при подготовке к печати настоящей заметки.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
5 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, *Предельные распределения для независимых случайных величин*, М.—Л., 1949. ² Ю. В. Линник, ДАН, **94**, № 4 (1954). ³ А. В. Скороход, ДАН, **98**, № 5 (1954). ⁴ Н. Pollard, Bull. Am.

Math. Soc., **52**, 908 (1946). ⁵ К. А. Карпов, *Таблицы функции $w(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{t^2} dt$ в комплексной области*, Изд. АН СССР, 1954.