

А. В. СКОРОХОД

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ УСТОЙЧИВЫХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 VII 1954)

Каждый устойчивый закон распределения подходящим преобразованием независимой переменной можно привести к каноническому закону, определяемому характеристической функцией

$$f(t) = \exp \left\{ -|t|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sign} t \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha \right) \right\}, \quad \alpha \neq 1^*;$$

$$f(t) = \exp \left\{ -|t| \left(1 + i \frac{2}{\pi} \beta \operatorname{sign} t \ln |t| \right) \right\}, \quad \alpha = 1,$$

где $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq 1$ (см., например, ⁽¹⁾, стр. 177).

Так как нахождение плотностей устойчивых распределений в общем случае невозможно, возникает задача: изучить асимптотическое поведение плотности устойчивого закона на концах того интервала, где она отлична от нуля. В случае $\alpha < 1$, $\beta = 1$ таким интервалом будет полупрямая $(0, +\infty)$, при $\alpha < 1$, $\beta = -1$ — полупрямая $(-\infty, 0)$, в остальных случаях — вся прямая.

Таблица 1

	$\alpha < 1$	$\alpha = 1$	$\alpha > 1$
$\beta = 1$	$x \rightarrow +\infty$ I ⁽³⁾ $x \rightarrow 0$ ($x > 0$) IV ⁽⁵⁾	$x \rightarrow +\infty$ II $x \rightarrow -\infty$ V	$x \rightarrow +\infty$ III ⁽⁴⁾ $x \rightarrow -\infty$ VI*
$-1 < \beta < 1$	$x \rightarrow +\infty$ I ⁽⁴⁾ $x \rightarrow -\infty$ I* ⁽⁴⁾	$x \rightarrow +\infty$ II $x \rightarrow -\infty$ II*	$x \rightarrow +\infty$ III ⁽⁴⁾ $x \rightarrow -\infty$ III* ⁽⁴⁾
$\beta = -1$	$x \rightarrow -\infty$ I* ⁽³⁾ $x \rightarrow 0$ ($x < 0$) IV* ⁽⁵⁾	$x \rightarrow -\infty$ II* $x \rightarrow +\infty$ V*	$x \rightarrow -\infty$ III* ⁽⁴⁾ $x \rightarrow +\infty$ VI

Обозначим через $p(x, \alpha, \beta)$ плотность устойчивого закона при соответствующих значениях параметров α и β . Так как имеет место равенство

$$p(-x, \alpha, -\beta) = p(x, \alpha, \beta),$$

достаточно рассматривать случаи $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow 0$ ($x > 0$). Случаи $x \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow 0$ ($x < 0$) получатся отсюда заменой x на $-x$.

* Здесь мы изменили знак β на обратный по сравнению с обычно принятым. Эта замена сделана для того, чтобы предельным законам для сумм положительных случайных одинаково распределенных величин всегда соответствовало $\beta = +1$.

Табл. 1 и формулы I—VI дают сводку известных в настоящее время результатов, относящихся к поставленной выше задаче.

$$I. \quad p(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi x} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{-\alpha n},$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1} \Gamma(n\alpha + 1)}{n!} \left(1 + \beta^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2} \alpha\right)^{n/2} \sin n \left[\frac{\pi}{2} \alpha + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\beta \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha\right)\right].$$

$$II. \quad p\left(x + \beta \frac{2}{\pi} \ln x, \beta, 1\right) = \frac{1}{\pi x} \sum_{h=1}^N b_h x^{-h} + O(x^{-N-2});$$

$$b_h = \operatorname{Im} \int_0^{\infty} e^{-v} v^h \left(i + i\beta - \frac{2}{\pi} \beta \ln v\right)^h dv.$$

$$III. \quad p(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi x} \sum_{n=1}^N a_n x^{-\alpha n} + O(x^{-(N+1)\alpha-1});$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1} \Gamma(n\alpha + 1)}{n!} \left(1 + \beta^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2} \alpha\right)^{n/2} \sin n \left[\frac{\pi}{2} \alpha + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\beta \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha\right)\right].$$

$$IV. \quad p(x, \alpha, 1) = A(\alpha) x^{-1 - \frac{\lambda(\alpha)}{2}} \exp(-B(\alpha) x^{-\lambda(\alpha)}) \times \left[1 + O\left(x^{\frac{\lambda}{2} - \varepsilon}\right)\right];$$

$$A(\alpha) = \frac{\alpha^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \left(\cos \frac{\pi}{2} \alpha\right)^{-\frac{1}{2(1-\alpha)}}}{\sqrt{2\pi(1-\alpha)}}; \quad B(\alpha) = (1-\alpha) \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(\cos \frac{\pi}{2} \alpha\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}};$$

$$\lambda(\alpha) = \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

$$V. \quad p(x, 1, 1) = \frac{1}{\pi \sqrt{e}} \exp\left\{-\frac{\pi}{4} x - \frac{2}{\pi e} e^{-\frac{\pi}{2} x}\right\} \times \left[1 + O\left(e^{\frac{\pi}{4} x(1-\varepsilon)}\right)\right].$$

$$VI. \quad p(x, \alpha, 1) = A'(\alpha) x^{-1 + \frac{\lambda'(\alpha)}{2}} \exp\{-B'(\alpha) x^{\lambda'(\alpha)}\} \times \left[1 + O\left(x^{-\frac{\lambda'(\alpha)}{2} + \varepsilon}\right)\right];$$

$$A'(\alpha) = \frac{\alpha^{\frac{-1}{2(\alpha-1)}} \left|\cos \frac{\pi}{2} \alpha\right|^{\frac{1}{2(\alpha-1)}}}{\sqrt{2\pi(\alpha-1)}}; \quad B'(\alpha) = (\alpha-1) \alpha^{\frac{-\alpha}{\alpha-1}} \left|\cos \frac{\pi}{2} \alpha\right|^{\frac{1}{\alpha-1}};$$

$$\lambda'(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

В каждой клетке таблицы приведены номер формулы и ссылка на работу, где эта формула опубликована впервые. Формулы, отмеченные в таблице звездочками, получаются из соответствующих формул без звездочек заменой x на $-x$ и β на $-\beta$. Следует отметить, что случай $\beta=0$ специально изучался Винтнером⁽²⁾. Формулы IV, VI были впервые предложены А. Н. Колмогоровым без строгого обоснования и без указания постоянных $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$. Отсутствие ссылок означает, что соответствующие формулы приводятся впервые в настоящей заметке.

Доказательство формулы VI ничем не отличается от доказательства IV (см. (5), теорема 1).

Рассмотрим доказательство формулы V. Из формулы обращения получаем:

$$p(x, 1, 1) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -itx - t \left(1 + \frac{2i}{\pi} \ln t \right) \right\} dt.$$

Сделаем заметку $t = ue^{-\frac{\pi}{2}x}$. Получим:

$$p(x, 1, 1) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{\pi}{2}x} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -e^{-\frac{\pi}{2}x} u \left(1 + \frac{2i}{\pi} \ln u \right) \right\} du. \quad (\gamma)$$

Пусть переменная u меняется в комплексной плоскости с разрезом вдоль вещественной оси от 0 до $-\infty$. Используем для оценки выражения (γ) метод перевала (см., например, ⁽⁶⁾). Возьмем следующий контур интегрирования: от 0 до i/e (i/e и будет точкой перевала) вдоль мнимой оси, потом по дуге окружности с центром в нуле от i/e до $1/e$, дальше по вещественной прямой от $1/e$ до $+\infty$. Находим сразу:

$$I_1 = \operatorname{Re} \int_0^{i/e} \exp \left[\left(-u - i \frac{2}{\pi} u \ln u \right) e^{-\frac{\pi}{2}x} \right] du = 0.$$

Оценим теперь интеграл по вещественной оси:

$$|I_3| = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}x}}{\pi} \left| \operatorname{Re} \int_{1/e}^{\infty} \exp \left\{ \left(-u - i \frac{2}{\pi} u \ln u \right) e^{-\frac{\pi}{2}x} \right\} du \right| \leq e^{-\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{e}} e^{-\frac{\pi}{2}x}.$$

Рассмотрим интеграл по дуге окружности. Положим

$$eu = e^{i \frac{\pi}{2} - i\varphi} \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

После преобразования получим:

$$I_2 = \frac{\xi}{2} e^{-\xi} \operatorname{Re} \int_0^{\pi/2} \exp \{ -\xi (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi - 1 - i \sin \varphi + i \varphi \cos \varphi) \} e^{-i\varphi} d\varphi,$$

$$\text{где } \xi = \frac{2}{\pi e} e^{-\frac{\pi}{2}x}.$$

Выражение $\cos \varphi + \varphi \sin \varphi - 1$ достигает минимума при $\varphi = 0$ и монотонно возрастает с изменением φ от 0 до $\pi/2$. Поэтому при достаточно малых η справедлива оценка:

$$\left| \int_{\eta}^{\pi/2} \exp \{ -(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi - 1 - i \sin \varphi + i \varphi \cos \varphi) \xi \} e^{-i\varphi} d\varphi \right| < e^{-\frac{\eta^2}{4} \xi}.$$

Пусть $\eta = \xi^{-1/3+\varepsilon}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{\eta} \exp [(-\cos \varphi - \varphi \sin \varphi + 1 + i \sin \varphi - i \varphi \cos \varphi) \xi] e^{-i\varphi} d\varphi = \\ = \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} [1 + O(\xi^{-1/3+3\varepsilon})]. \end{aligned}$$

Сопоставляя все эти оценки и подставляя значение ξ , и получим доказательство формулы V.

Для доказательства формулы II в выражении

$$p\left(x + \frac{2}{\pi} \beta \ln x, 1, \beta\right) = \\ = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \exp\left\{-iu\left(x + \frac{2}{\pi} \beta \ln x\right) - u\left(1 + \frac{2}{\pi} \beta i \ln u\right)\right\} du$$

сделаем замену $iu x = v$, потом повернем контур интегрирования на угол $\pi/2$ по часовой стрелке, после чего получим:

$$p\left(x + \frac{2}{\pi} \beta \ln x\right) = \frac{1}{\pi x} \operatorname{Im} \int_0^{\infty} \exp\left\{-v - \frac{2\beta}{\pi} \beta \frac{v}{x} \ln v + \frac{iv}{x} (1 + \beta)\right\} dv.$$

Разлагая выражение в правой части последнего равенства по степеням x^{-1} по формуле Тейлора с остаточным членом, мы и получим требуемую формулу для $\beta > 0$. Для доказательства этой формулы при $\beta < 0$ рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \exp\left\{-iu - uz\left(1 + \frac{2}{\pi} \beta i \ln u\right)\right\} du,$$

которая связана с плотностью следующим образом:

$$p\left(x + \frac{2}{\pi} \beta \ln x, 1, \beta\right) = \frac{1}{\pi x} \varphi\left(\frac{1}{x}\right), \quad x > 0.$$

Производные функции $\varphi(z)$ ограничены при $z \rightarrow 0$, $z > 0$. Чтобы доказать это, достаточно выражение

$$\psi^{(k)}(z) = \operatorname{Re} \int_1^{\infty} (-1)^k u^k \left(1 + \frac{2}{\pi} \beta i \ln u\right)^k \exp\left\{-iu - uz\left(1 + \frac{2}{\pi} \beta i \ln u\right)\right\} du$$

проинтегрировать $k+1$ раз по частям. Интегралы, которые при этом получаются, будут сходиться равномерно при $\operatorname{Im} \beta \leq 0$ и при $\operatorname{Im} \beta < 0$ будут аналитическими по β . Из теоремы о единственности аналитических функций следует, что при $\beta < 0$ коэффициенты в разложении $\varphi(z)$ по z будут выражаться теми же аналитическими выражениями от β , что и при $\beta > 0$. Это и завершает доказательство формулы II.

Интересно отметить, что свойство плотности быть целой аналитической функцией при $\alpha > 1$ (см., например, ⁽¹⁾, стр. 107) сохраняется и для случая $\alpha = 1$, $\beta \neq 0$. Для доказательства повернем контур интегрирования в формуле

$$p(x, 1, \beta) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \exp\left\{-itx - t\left(1 + \frac{2}{\pi} \beta t \ln t\right)\right\} dt$$

на угол $(-\pi/2)$ (β считаем положительным). Получим:

$$p(x, 1, \beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left\{-ux - \beta \frac{2}{\pi} u \ln u\right\} \sin\{(1 + \beta)u\} du.$$

Отсюда легко следует доказательство нашего утверждения.

Приношу глубокую благодарность А. Н. Колмогорову и Е. Б. Дынкину за руководство настоящей работой.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
1 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, 1949. ² A. Wintner, Duke Math. J., 8, № 4, 678 (1941). ³ H. Pollard, Bull. Am. Math. Soc., 52, 908 (1946). ⁴ H. Bergström, Ark. f. Mat., 2, № 18 (1952). ⁵ Ю. В. Линник, ДАН, 94, № 4 (1954). ⁶ М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, 1951.