

М. А. НАЙМАРК

**О НЕКОТОРЫХ ПРИЗНАКАХ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ
СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ВЕКТОРОВ ЛИНЕЙНОГО
ОПЕРАТОРА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

(Представлено академиком В. И. Смирновым 14 VI 1954)

Разложение по собственным функциям линейных регулярных не-самосопряженных дифференциальных операторов было предметом исследования многих авторов (см., например, ^(1, 2)). В недавней работе М. В. Келдыша ⁽³⁾ были изучены некоторые классы линейных операторов в гильбертовом пространстве и для этих классов установлена полнота их собственных и присоединенных векторов. Применение этих результатов привело к ряду новых критериев полноты для регулярных несамопряженных дифференциальных операторов, обыкновенных и в частных производных. Другие критерии полноты для регулярных несамопряженных дифференциальных операторов были получены в статье М. С. Лившица ⁽⁴⁾.

Случай нерегулярного несамопряженного оператора второго порядка

$$l(y) = -y'' + p(x)y, \quad (1)$$

где $p(x)$ — комплексная суммируемая функция, был рассмотрен автором в ⁽⁵⁾. Однако другой часто встречающийся случай, именно случай комплексной функции $p(x) \rightarrow \infty$, до сих пор не рассматривался.

Ниже приводятся некоторые общие предложения о полноте системы собственных и присоединенных векторов несамопряженного оператора, имеющего дискретный спектр. Применяя эти предложения, можно получить различные условия полноты системы собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка при $p(x) \rightarrow \infty$.

Теорема 1. Пусть A — замкнутый линейный оператор, заданный на всюду плотном линейном множестве в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, резольвента R_λ которого вполне непрерывна, и пусть существуют плотное подмножество $\mathfrak{E}$ пространства $\mathfrak{H}$ и последовательность окружностей Γ_n с центром в начале координат, обладающих следующими свойствами: 1) на Γ_n нет собственных значений оператора A ; 2) радиусы r_n окружностей Γ_n неограниченно возрастают при $n \rightarrow \infty$; 3) для любого вектора $f \in \mathfrak{E}$ резольвента R_λ удовлетворяет условию

$$\max_{\lambda \in \Gamma_n} \|R_\lambda f\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Тогда система собственных и присоединенных векторов оператора A полна в $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — все собственные значения оператора A и пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{h_n}$ — все собственные значения A , на-

ходящиеся внутри Γ_n . Пусть, кроме того, λ не является собственным значением оператора A и находится внутри Γ_n .

Применяя теорему о вычетах, имеем:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_n} \frac{R_\mu f d\mu}{\mu - \lambda} = R_\lambda - \sum_{j=1}^{k_n} G_j(\lambda) f, \quad (3)$$

где $G_j(\lambda)$ — главная часть R_λ в окрестности λ_j . С другой стороны, из (2) вытекает, что

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_n} \frac{R_\mu f}{\mu - \lambda} d\mu \right\| \leq \max_{\mu \in \Gamma_n} \|R_\mu f\| \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r_n - |\lambda|} 2\pi r_n \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (4)$$

так что

$$R_\lambda f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} G_j(\lambda) f. \quad (5)$$

Но $G_j(\lambda)f$ есть линейная комбинация собственных и присоединенных векторов оператора A (см., например, (3)), поэтому (5) означает, что $R_\lambda f$ есть предел таких линейных комбинаций, т. е. что эти линейные комбинации плотны в $R_\lambda \mathfrak{S}$, а значит, и в $R_\lambda \mathfrak{F}$; так как $R_\lambda \mathfrak{F}$ плотно в $\mathfrak{F}$, то теорема доказана.

Замечание 1. Пусть в дополнение к условиям теоремы 1 окрестности Γ_n можно выбрать так, что каждое кольцо между Γ_{n-1} и Γ_n , начиная с некоторого, содержит в точности одно собственное значение оператора A . Тогда для любого вектора $f \in \mathfrak{S}$ имеет место разложение в ряд по собственным и присоединенным векторам:

$$R_\lambda f = \sum_{j=1}^{\infty} G_j(\lambda) f. \quad (6)$$

Замечание 2. Условие 3) теоремы 1, очевидно, выполнено, если

$$\lim_{\lambda \in \Gamma_n} \|R_\lambda\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty; \quad (7)$$

при этом можно положить $\mathfrak{S} = \mathfrak{F}$.

Теорема 2. Пусть $A, \Gamma_n, \mathfrak{S}$ — те же, что и в теореме 1, и пусть B — линейный оператор в $\mathfrak{F}$ такой, что: 1) $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{D}_B$, где $\mathfrak{D}_A$ и $\mathfrak{D}_B$ — области определения A и B ; 2) при всех достаточно больших n и $\lambda \in \Gamma_n$: а) $(A + B - \lambda I) \mathfrak{S}$ плотно в $\mathfrak{F}$;

$$\text{б) } \|R_\lambda B f\| \leq q \|f\| \quad \text{для всех } f \in \mathfrak{S}, \text{ где } q < 1. \quad (8)$$

Тогда оператор $A + B$ имеет замыкание $\widetilde{A + B}$, резольвента оператора $\widetilde{A + B}$ также вполне непрерывна, и система собственных и присоединенных векторов оператора $\widetilde{A + B}$ полна в $\mathfrak{F}$.

Доказательство. Из (8) вытекает, что при достаточно большом n и $\lambda \in \Gamma_n$ оператор $R_\lambda B$ ограничен и определен на плотном множестве; следовательно, он однозначно продолжается с сохранением нормы до ограниченного оператора в $\mathfrak{F}$. Пусть C_λ — этот ограниченный оператор, так что $R_\lambda B \subset C_\lambda$; в силу (8) $\|C_\lambda\| \leq q$, и потому существует ограниченный обратный $(1 + C_\lambda)^{-1}$, причем

$$\|(1 + C_\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - q}. \quad (9)$$

Положим $D_\lambda = (1 + C_\lambda)^{-1} R_\lambda$; тогда для $f \in \mathfrak{S}$ $D_\lambda (A + B - \lambda I) f = f$. Действительно,

$$\begin{aligned} D_\lambda (A + B - \lambda I) f &= (1 + C_\lambda)^{-1} R_\lambda (A - \lambda I + B) f = (1 + C_\lambda)^{-1} (1 + R_\lambda B) f = \\ &= (1 + C_\lambda)^{-1} (1 + C_\lambda) f = f. \end{aligned}$$

Это показывает, что существует $(A + B - \lambda I)^{-1}$, причем $(A + B - \lambda I)^{-1} \subset D_\lambda$. Так как D_λ ограничен, то $(A + B - \lambda I)^{-1}$ также ограничен и потому имеет замыкание. Но тогда $A + B - \lambda I$, а значит, и $A + B$ имеет замыкание, которое обозначим через $\widetilde{A + B}$. Очевидно, также $(\widetilde{A + B} - \lambda I)^{-1} \subset D_\lambda$. Однако в действительности $(\widetilde{A + B} - \lambda I)^{-1} = D_\lambda$, ибо, по условию, совокупность всех векторов $(A + B - \lambda I)f$, $f \in \mathfrak{E}$, плотна в $\mathfrak{H}$. Действительно, отсюда вытекает, что область определения оператора $(A + B - \lambda I)^{-1}$ также плотна в $\mathfrak{H}$; так как этот оператор ограничен, то область определения его замыкания $(\widetilde{A + B} - \lambda I)^{-1}$ совпадает с $\mathfrak{H}$.

Таким образом, оператор $D_\lambda = (1 + C_\lambda)^{-1}R_\lambda$ является при данном λ резольвентой оператора $\widetilde{A + B}$; как произведение вполне непрерывного R_λ на ограниченный $(1 + C_\lambda)^{-1}$, оператор D_λ вполне непрерывен. Следовательно, при достаточно большом n оператор R_λ вполне непрерывен для всех точек $\lambda \in \Gamma_n$; отсюда, применяя известное соотношение $R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda)R_\mu R_\lambda$, заключаем, что R_μ вполне непрерывен для всех точек μ , не принадлежащих спектру оператора $\widetilde{A + B}$.

Наконец, из (2) и (9) вытекает, что при $f \in \mathfrak{E}$

$$\max_{\lambda \in \Gamma_n} \|D_\lambda f\| \leq \max_{\lambda \in \Gamma_n} \|R_\lambda f\| \frac{1}{1-q} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (10)$$

На основании теоремы 1 отсюда следует полнота системы собственных и присоединенных векторов оператора $\widetilde{A + B}$.

Замечание 3. Условие а) теоремы 2 выполняется, если при достаточно большом n , $\lambda \in \Gamma_n$ и $f \in (A - \lambda I) \mathfrak{E}$

$$\|BR_\lambda f\| \leq q_\lambda \|f\|, \quad (11)$$

где $q_\lambda < 1$, и $(A - \lambda I) \mathfrak{E}$ плотно в $\mathfrak{H}$.

Доказательство. В силу (11) BR_λ ограничен и определен на плотном множестве $(A - \lambda I) \mathfrak{E}$, и потому он продолжается единственным образом до ограниченного оператора в $\mathfrak{H}$, который обозначим через Q_λ . При этом $\|Q_\lambda\| \leq q_\lambda < 1$; следовательно, оператор $(1 + Q_\lambda)^{-1}$ определен во всем пространстве $\mathfrak{H}$ и ограничен. Но $(A + B - \lambda I) \mathfrak{E} = (1 + BR_\lambda)(A - \lambda I) \mathfrak{E} = (1 + Q_\lambda)(A - \lambda I) \mathfrak{E}$; так как $(A - \lambda I) \mathfrak{E}$ плотно в $\mathfrak{H}$ и $(1 + Q_\lambda)^{-1}$ ограничен, то и $(A + B - \lambda I) \mathfrak{E}$ плотно в $\mathfrak{H}$.

Замечание 4. Условия теоремы 2 будут выполнены, если A — полуограниченный снизу самосопряженный оператор, резольвента R_λ которого вполне непрерывна, а B — ограниченный оператор такой, что

$$\|B\| < \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}), \quad (12)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — собственные значения оператора A , расположенные в порядке возрастания; при этом в качестве $\mathfrak{E}$ можно взять линейную оболочку собственных векторов оператора A , а в качестве Γ_n — окружности радиусов $r_n = \frac{1}{2}(\lambda_{n-1} + \lambda_n)$.

Действительно, пусть P_n — оператор проектирования на подпространство всех собственных векторов оператора A , отвечающих его собственному значению λ_n . Тогда $R_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_n)^{-1} P_n$ и, следовательно, $\|R_\lambda\| \leq (\min_{\Gamma_n} |\lambda - \lambda_n|)^{-1}$. Но $\min_{\Gamma_n} |\lambda - \lambda_n| = \frac{1}{2}(\lambda_n - \lambda_{n-1})$, и потому, при достаточно большом n ,

$$\|R_\lambda B\| \leq q, \quad \|BR_\lambda\| \leq q \quad \text{на } \Gamma_n, \quad (13)$$

где

$$q = \frac{1}{\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) - \varepsilon} \|B\|.$$

В силу (12) число $\varepsilon > 0$ можно выбрать настолько малым, что

$$\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) - \varepsilon > \|B\|;$$

следовательно, $q < 1$, и условие (8) выполнено.

Далее, пусть $f \in \mathfrak{G}$; тогда $f = f_1 + f_2 + \dots + f_m$, где $P_k f_k = f_k$. Следовательно, $P_n f = 0$ при $n > m$, и при $\lambda \in \Gamma_n$.

$$\begin{aligned} \|R_\lambda f\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^m \frac{P_k f}{\lambda - \lambda_k} \right\|^2 = \sum_{k=1}^m \frac{\|P_k f\|^2}{|\lambda - \lambda_k|^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{\min_{1 \leq k \leq m} |\lambda - \lambda_k|^2} \sum_{k=1}^m \|P_k f\|^2 = \frac{1}{\min_{1 \leq k \leq m} |\lambda - \lambda_k|^2} \|f\|^2, \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$ $\lambda \in \Gamma_n$ и при фиксированном f последнее выражение $\rightarrow 0$, так что (2) тоже выполнено. Наконец, в силу (13) и замечания 3 условие а) также выполняется.

Замечание 5. Условие (12) выполняется, если

$$\lambda_n - \lambda_{n-1} \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty; \quad (14)$$

следовательно, при выполнении всех остальных условий замечания 4 имеет место полнота собственных и присоединенных векторов оператора $A + B$.

Покажем на примере, как применяются эти предложения к сингулярным дифференциальным операторам. Пусть A — самосопряженный дифференциальный оператор в $\mathcal{L}_2(0, \infty)$, порожденный дифференциальным выражением $l(y) = -y'' + p(x)y$ и краевым условием $y'(0) - \theta y(0) = 0$, где θ — вещественное число, а $p(x)$ — вещественная непрерывная функция, причем $p(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Как известно (см., например, (6)), оператор A полуограничен снизу и его спектр дискретен. Выберем $p(x)$ таким образом, чтобы $\lambda_n - \lambda_{n-1} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, например $p(x) = x^k$, $k > 2$. (Из известных результатов Титчмарша (7), теорема 7.3 вытекает, что при $p(x) = x^k$, $k > 2$, будет

$\lambda_n \sim Cn^{\frac{2k}{k+2}}$, причем $\frac{2k}{k+2} > 1$.) Пусть теперь $q(x)$ — произвольная существенно ограниченная измеримая комплекснозначная функция, а B — оператор умножения на $q(x)$. Для оператора $A + B$ выполнены условия замечания 5, и мы приходим к следующему результату:

Пусть $q(x)$, $0 \leq x < \infty$, — произвольная существенно ограниченная измеримая комплекснозначная функция, θ — произвольное действительное число. При $k > 2$ спектр оператора L , порожденного дифференциальным выражением $l(y) = -y'' + (x^k + q(x))y$ и краевым условием $y'(0) - \theta y(0) = 0$, дискретен, его резольвента есть вполне непрерывный оператор, и совокупность собственных и присоединенных векторов оператора L полна в $\mathcal{L}_2(0, \infty)$.

Поступило
8 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ G. D. Birkhoff, Trans. Am. Math. Soc., 9, 373 (1908). ² Я. Д. Тамаркин, О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, Петроград, 1917. ³ М. В. Келдыш, ДАН, 77, 11 (1951). ⁴ М. С. Лившиц, Матем. сборн., 34 (76): 1, 145 (1954). ⁵ М. А. Наймарк, ДАН, 89, 213 (1953). ⁶ И. М. Глазман, Усп. матем. наук, 5, в. 6 (40), 102 (1950). ⁷ E. C. Titchmarsh, Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Equations, Oxford, 1946.