

ЛЮДМИЛА КЕЛДЫШ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ НУЛЬМЕРНЫХ ОТКРЫТЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ВИДЕ СУПЕРПОЗИЦИЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 2 VII 1954)

Мы изучаем здесь нульмерные* открытые отображения компакта X размерности $n > 0$ на компакт Y размерности $m > n$. А. Н. Колмогоров⁽¹⁾ построил пример одномерного континуума, нульмерно и открыто отображающегося на двумерный континуум. В⁽²⁾ мы доказали существование одномерного континуума X , нульмерно и открыто отображающегося на квадрат. Очевидно, что топологическое произведение $X \times C_{n-1}$, где C_{n-1} — $(n-1)$ -мерный куб, нульмерно и открыто отображается на C_n ; континуум $X \times X$ нульмерно и открыто отображается на четырехмерный куб и т. д.

Мы показываем, что имеет место:

Теорема. *Всякое нульмерное открытое отображение f компакта X размерности $n > 0$ на компакт Y размерности $n + k$, $k > 0$, представимо в виде суперпозиции $2k + 1$ нульмерных непрерывных отображений:*

$$f = \psi_{k+1} \varphi_k \psi_k \dots \varphi_1 \psi_1, \quad (1)$$

где все ψ_i не повышают размерности, а каждое φ_i двукратно** и повышает размерность на единицу.

Из⁽³⁾ (гл. II, § 4, следствие 3) формула (1) следует для случая, когда Y — $(n + k)$ -мерный куб. В⁽³⁾ мы доказали формулу (1) для нульмерных отображений компакта, обладающих свойством (γ). Напомним его.

Мы говорим, что непрерывное отображение f компакта X на компакт большей размерности обладает свойством (γ), если для каждого открытого в X множества V такого что

$$\dim X < \dim f(V) = p,$$

и для каждого целого числа i такого, что $\dim X < i \leq p$, в V найдется совершенное множество Q_V^i такое, что

$$\begin{aligned} \dim f(Q_V^i) &= i, \\ \dim M_{f(Q_V^i)} &= i - 1. \end{aligned}$$

Для непрерывного отображения f , $P = f(Q)$, обозначаем через M_f множество тех точек P , прообразы которых содержат более одной точки. Формула (1) получается как следствие из следующей теоремы:

* Непрерывное отображение называется нульмерным, если прообраз каждой точки нульмерен.

** Т. е. прообраз $\varphi^{-1}(y)$ каждой точки содержит не более двух точек.

Теорема 1. Нульмерное открытое отображение f n -мерного компакта X на m -мерный, $m > n$, компакт Y представимо в виде суперпозиции двух нульмерных непрерывных отображений

$$f = \psi f_1, \quad (2)$$

где ψ не повышает размерности, а f_1 обладает свойством (γ) и $\dim M_{f_1} = m - 1$.

Доказательство этой теоремы опирается на две леммы.

Лемма 1. Пусть f — непрерывное отображение компакта P на компакт Q большей размерности, причем прообраз каждой точки $q \in Q$ содержит не более N точек, где N — целое число. Тогда найдется компакт $P_0 \subset P$ такой, что $\dim f(P_0) = \dim Q$ и $\dim M_f(P_0) < \dim Q$.

Эта лемма легко доказывается.

Лемма 2. Пусть $Y = f(X)$ — нульмерное непрерывное отображение n -мерного компакта X на m -мерный компакт Y , $m > n$, причем $\dim M_f = r$. Тогда, каков бы ни был компакт $F \subset X$ и его окрестность W , существует у F другая окрестность U такая, что:

- 1) $U \subset W$; $\dim B_U \leq n - 1$; $\dim f(B_U) \leq r - 1$, где B_U — граница U ;
- 2) прообраз каждой точки $y \in f(B_U)$ содержит на B_U не более r точек;

3) $f(B_U)$ нигде не плотно на каждом Y_k , где Y_k — замыкание множества всех точек $y \in Y$, в которых $\dim_y Y \geq n + k$, $k = 1, 2, \dots, m - n$.

Доказательство этой леммы является почти точным повторением доказательства леммы 2 из (3). Чтобы удовлетворилось условие 3), достаточно заметить, что разбиение M_f на нульмерные слагаемые: $M_f = M_1 + \dots + M_{m-n+1}$ можно произвести так, что M_1 всюду плотно на каждом Y_k , $1 \leq k \leq m - n$.

При доказательстве теоремы 1 делается построение, аналогичное тому, которое сделано в (3) при доказательстве теоремы 2. Именно, используя лемму 2, мы представляем компакт X в виде

$$X = \prod_{k=1}^{\infty} \sum \delta_{i_1 \dots i_k}, \quad i_r = 0, 1,$$

где $\delta_{i_1 \dots i_k}$ — кусок* X , $\delta_{i_1 \dots i_k i_{k+1}} \subset \delta_{i_1 \dots i_k}$, диаметры $\delta_{i_1 \dots i_k}$ стремятся к 0 с возрастанием k , причем: если $\dim f(\delta_{i_1 \dots i_k}) = r > \dim X$, то

$$\dim f(\delta_{i_1 \dots i_k} \cdot \delta_{i_1 \dots i_{k+1}}) \leq r - 1,$$

кратность отображения f на $\delta_{i_1 \dots i_k} \cdot \delta_{i_1 \dots i_{k+1}}$ не превосходит r и отображение $f(\delta_{i_1 \dots i_k} \delta_{i_1 \dots i_{k+1}})$ нигде не плотно на каждом Y_p . Затем полагаем

$$\Gamma_k = \sum f(\delta_{i_1 \dots i_k} \cdot \delta_{j_1 \dots j_k}), \quad \delta_{i_1 \dots i_k} \neq \delta_{j_1 \dots j_k}.$$

Легко видеть, что

$$\Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}, \quad \dim \Gamma_k \leq m - 1$$

и Γ_k нигде не плотно на каждом Y_p . Так как f открыто, то (если B — граница)

$$Bf(\delta_{i_1 \dots i_k}) \subset f(B\delta_{i_1 \dots i_k}) \subset \Gamma_k,$$

и для достаточно большого k $\dim \Gamma_k = m - 1$.

* Куском компакта мы называем замыкание открытого в нем множества.

Мы задаем на Y последовательность непрерывных функций $\theta_k(y)$, $k = 1, 2, \dots$, следующим образом:

$$\theta_k(y) = 0, \quad y \in \Gamma_k; \quad 0 < \theta_k(y) < \frac{1}{2} \theta_{k-1}(y), \quad y \in Y - \Gamma_k; \quad \theta_k(y) < \frac{1}{2^k}. \quad (3)$$

На каждом куске $f(\delta_{i_1 \dots i_k})$ определяем непрерывную функцию $\theta_{i_1 \dots i_k}$, положив:

$$\theta_{i_1 \dots i_k}(y) = \sum_{r=1}^k i_r \theta_r(y), \quad y \in f(\delta_{i_1 \dots i_k}).$$

На компакте X определяем функцию $\varphi_k(x)$:

$$\varphi_k(x) = \theta_{i_1 \dots i_k}[f(x)], \quad x \in \delta_{i_1 \dots i_k}.$$

Так же, как в ⁽³⁾, при доказательстве теоремы 2 показываем, что $\varphi_k(x)$ и также $F(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x)$ — непрерывные функции на X .

В топологическом произведении компакта Y на сегмент $[0 \leq z \leq 1]$ рассматриваем компакт Z , точки которого (y, z) заданы соотношениями:

$$y = f(x); \quad z = F(x); \quad x \in X. \quad (4)$$

Соотношения (4) определяют непрерывное отображение f_1 компакта X на Z . Обозначим через ψ непрерывное отображение, осуществляющее проектирование Z на Y . Тогда:

$$f = \psi f_1. \quad (5)$$

Эта суперпозиция удовлетворяет условиям теоремы.

Доказательство нульмерности ψ проводится так же, как при доказательстве теоремы 2 в ⁽³⁾.

Затем мы показываем, что для любой точки $M \in Z$ в Z содержится поверхность L_M , $M \in L_M$, определенная непрерывной функцией, заданной на Y . Отсюда легко следует, что для любого открытого в X множества V

$$\dim f_1(V) = \dim f(V),$$

т. е. ψ не повышает размерности.

Чтобы доказать, что отображение f_1 обладает свойством (γ) , мы рассматриваем открытое в X множество V такое, что

$$n < \dim f_1(V) = r \leq m.$$

В V находим кусок $\delta_{i_1 \dots i_k}$ такой, что

$$\dim f_1(\delta_{i_1 \dots i_k}) = r; \quad \dim f_1(B\delta_{i_1 \dots i_k}) = r - 1.$$

Заметим, что на $B\delta_{i_1 \dots i_k}$ кратность отображения f_1 (так же, как и f) не превосходит r , и применяя лемму 1, мы выбираем последовательно в $B\delta_{i_1 \dots i_k}$ множества Q_V^i , $n < i \leq r - 1$. Затем, используя то обстоятельство, что каждое Γ_p нигде не плотно на Y , мы находим такой кусок $\delta_{i_1 \dots i_k} \subset V$, что $\dim f_1(\delta_{i_1 \dots i_k}) = r$ и $\dim M_{f_1}(\delta_{i_1 \dots i_k}) = r - 1$, и полагаем $Q_V = \delta_{i_1 \dots i_k}$.

Чтобы показать, что $\dim M_{f_1} = m - 1$, достаточно заметить, что $M_{f_1} \subset \psi^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k \right)$ и $\dim \Gamma_k \leq m - 1$. В силу нульмерности ψ имеем $\dim M_{f_1} \leq m - 1$. Но, в силу теоремы Гуревича (⁴), $\dim M_{f_1} \geq m - 1$, и теорема доказана.

Теперь легко получить формулу (1) для нульмерного открытого отображения f . Так как f_1 обладает свойством (γ), $\dim f_1(X) = m$ и $\dim M_{f_1} = m - 1$, то, в силу следствия 1 из § 4 гл. II (³), f_1 представимо в виде

$$f_1 = \varphi_k \psi_k \dots \varphi_1 \psi_1, \quad k = m - n,$$

где отображения φ_i и ψ_i удовлетворяют указанным для (1) условиям. Отсюда, в силу (5), непосредственно следует (1).

Легко проверить, что для отображения f , построенного А. Н. Колмогоровым (¹), формула (1) принимает вид

$$f = \psi \varphi.$$

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
24 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Н. Колмогоров, *Ann. Math.*, 38, № 1, 36 (1937). ² Л. В. Келдыш, *ДАН*, 97, № 2 (1954). ³ Л. В. Келдыш, *Матем. сборн.*, 28 (70): 3, 537 (1951).
⁴ W. Hurewicz, *J. f. reine u. angew. Math.*, 169, 71 (1932).