

М. А. ЕВГРАФОВ

СВОЙСТВА ПОЛНЫХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. И. Колмогоровым 22 VI 1954)

Во многих случаях требуется исследовать вопросы полноты систем аналитических функций в классах функций, регулярных в некоторой области, или в классе целых функций определенного роста. В связи с этим полезно рассматривать такие классы как функциональные пространства, в которых задана некоторая топология.

Назовем пространством $\mathfrak{A}(D)$ класс целых функций регулярных в D , в котором топология задана следующим понятием сходимости: $f_n(z) \rightarrow f(z)$, если $f_n(z)$ равномерно сходится к $f(z)$ на любом замкнутом множестве, лежащем внутри D . Аналогично определим $\mathfrak{A}(\bar{D})$, где $\bar{D}$ — замкнутая область. Под сходимостью $f_n(z)$ к $f(z)$ в $\mathfrak{A}(\bar{D})$ мы будем понимать равномерную сходимость $f_n(z)$ к $f(z)$ в некоторой области, содержащей $\bar{D}$ строго внутри.

Далее, возьмем какую-либо целую функцию

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{m_n},$$

все коэффициенты которой отличны от нуля.

Пространством $\mathfrak{A}(\Phi, D)$ мы назовем класс целых функций, представимых в виде

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \Phi(z\zeta) f(\zeta) d\zeta,$$

где $f(\zeta)$ — произвольная функция, регулярная вне D . Аналогично $\mathfrak{A}(\Phi, \bar{D})$. Под сходимостью $F_n(z)$ в $\mathfrak{A}(\Phi, D)$ мы будем понимать сходимость $f_n(\zeta)$ в $\mathfrak{A}(C\bar{D})$.

Отметим следующие свойства этих пространств.

Теорема 1*. Пусть D — односвязная область и ее дополнение до всей плоскости — обозначим его CD — также односвязно. Тогда любой линейный функционал в $\mathfrak{A}(D)$ имеет вид

$$L(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) g(z) dz, \quad g(z) \in \mathfrak{A}(CD).$$

Любой линейный функционал в $\mathfrak{A}(\Phi, D)$ имеет вид

$$L(F) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) g(\zeta) d\zeta, \quad F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \Phi(z\zeta) f(\zeta) d\zeta, \quad g(\zeta) \in \mathfrak{A}(D).$$

Для замкнутой области совершенно аналогично.

* Для простейшего случая см. (1, 2).

Теорема 2*. Слабая сходимость в пространствах, введенных выше, совпадает со сходимостью по топологии.

Рассмотрим теперь некоторую линейно независимую систему функций, принадлежащих $\mathfrak{A}(\Phi, D)$:

$$\varphi_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z^k.$$

Введя матрицу $A = \|a_{n,k}\|$, мы можем записать

$$\{\varphi_n^{(z)}\} = A \{z^n\}.$$

Систему $\{\varphi_n^{(1)}(z)\}$ мы назовем приведенной системой, если

$$\varphi_n^{(1)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_{n,k} z^k.$$

Выяснение вопроса о полноте любой системы может быть приведено к выяснению вопроса о полноте некоторой приведенной системы, легко получающейся из данной.

Формальными алгебраическими построениями определим систему $\{\psi_n(z)\}$, биортогональную с $\{\varphi_n(z)\}$. А именно, матрицей системы $\{\psi_n(z)\}$ мы будем считать матрицу $\bar{A}^{-1}$, т. е. транспонированную к обратной. Эту матрицу мы строим, представляя матрицу A в виде произведения двух треугольных. Для одной из них сначала находим обратную, а затем транспонированную с обратной, а для другой наоборот. Функции, определенные таким образом, могут не иметь никакого смысла. Для приведенной системы биортогональная система всегда существует и является системой многочленов степени n .

Систему $\{\psi_n^{(\Phi)}(z)\}$ мы будем называть Φ -биортогональной с системой $\{\varphi_n(z)\}$, если

$$\{\psi_n(z)\} = A^{(\Phi)} \{z^n\}, \quad \{\varphi_n(z)\} = A \{z^n\};$$

$$A^{(\Phi)} = \left\| \frac{\alpha_{n,k}}{m_k} \right\|, \quad \bar{A}^{-1} = \|\alpha_{n,k}\|, \quad \Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{m_n}.$$

Теорема 3. Для того, чтобы любая функция $F(z) \in \mathfrak{A}(\Phi, D)$ могла быть разложена (и притом единственным образом) в ряд по функциям системы $\{\varphi_n(z)\}$ в смысле топологии $\mathfrak{A}(\Phi, D_1)$, $D_1 \subset D$, необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\varphi_n^{(1)}(z)] [\psi_n^{(\Phi)}(z)] \quad (1)$$

сходилась к $\Phi(z)$ при $z \in D_1$, $z \in D$, причем равномерно в $\mathfrak{A}(\Phi, \bar{D}_1)$ при $z \in \bar{D}_\alpha \subset D$ и равномерно в $\mathfrak{A}(\Phi, \bar{D})$ при $z \in \bar{D}_\beta \subset D_1$.

Отсюда следует, в частности, что если система $\{\varphi_n(z)\}$ образует базис в $\mathfrak{A}(D)$, то биортогональная с ней система существует и ее функции регулярны в CD .

Если система $\{\varphi_n(z)\}$ приведенная, то в формулировке теоремы 3 можно не упоминать о сумме ряда (1), ибо если он сходится, то только к указанной сумме.

Поступило
29 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. И. Маркушевич, Матем. сборн., 17 (59), № 2, 211 (1952). ² М. Г. Халанов, ДАН, 79, № 6 (1954).

* См. также (2).