

М. М. ДЖРБАШЯН

**МЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЗНАКИ ПОЛНОТЫ ПОЛИНОМОВ ПРИ  
ВЗВЕШЕННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ НА БЕСКОНЕЧНЫХ КРИВЫХ**

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 VII 1954)

В заметке <sup>(1)</sup> нами были приведены некоторые метрические признаки полноты полиномов на бесконечных кривых при взвешенном среднеквадратическом приближении. Указанные признаки полноты остаются в силе и в случае взвешенно-равномерной аппроксимации.

В настоящей заметке приводятся формулировки ряда общих предложений о взвешенно-полиномиальных приближениях на бесконечных кривых более общей природы.

1°. Пусть неограниченная кривая линия  $L$  имеет конечное число ветвей, удаляющихся в бесконечность, не содержит петель и спрямляема в любой конечной части плоскости  $z$ . При этом заметим, что  $L$  может состоять из конечного числа связных кусков. Линия  $L$  разобьет плоскость  $z$  на конечное число односвязных неограниченных областей  $G_1, G_2, \dots, G_m$ .

Предположим, что каждая из областей  $G_j$  содержит некоторый угол с положительным раствором  $\pi/\alpha_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ). Допустим далее, что длины дуг  $\sigma$  линии  $L$ , отсчитанные от определенной фиксированной точки данного связного куска, являются однозначными функциями от  $|z|$ , начиная с некоторого  $|z| \geq r_0$ ; при этом полагаем, что

$$\frac{d\sigma(z)}{d|z|} \leq M, \quad |z| \geq r_0, \quad (1)$$

где  $M$  — постоянная, не зависящая от  $z$ .

Следуя обозначениям заметки <sup>(1)</sup>, будем говорить, что вещественная функция  $p_0(r)$ , заданная на полуоси  $[a, +\infty)$ , принадлежит к классу  $A$ , если при  $r \geq a > 0$  она представима в виде

$$p_0(r) = p_0(a) + \int_a^r \frac{\omega(t)}{t} dt, \quad (2)$$

где функция  $\omega(t) \geq 0$ , определена на полуоси  $[a, +\infty)$ , не убывает и  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t) = +\infty$ .

Скажем, что вещественная функция  $p(z)$ , определенная и измеримая на линии  $L$ , принадлежит к классу  $A[p_0(r)]$ , если существует функция  $p_0(r) \in A$  такая, что

$$p(z) \geq p_0(|z|) \text{ при } z \in L \text{ и } |z| \geq r_1.$$

Отнесем к классу  $L_2[p(z)]$  все функции  $f(z)$ , определенные и измеримые на линии  $L$ , для которых сходится интеграл

$$\int_L e^{-p(z)} |f(z)|^2 d\sigma(z). \quad (3)$$

Отнесем к классу  $C[p(z)]$  функции  $f(z)$ , определенные и непрерывные на  $L$  и удовлетворяющие условию

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} e^{-p(z)} f(z) = 0. \quad (4)$$

Теорема 1. Если

$$\int_0^{\infty} \frac{p_0(r)}{r^{1+\omega}} dr = +\infty, \quad \omega = \max_{1 \leq j \leq m} \{\alpha_j\}, \quad (5)$$

тогда:

1) для любой функции  $f(z) \in L_2[p(z)]$

$$\inf_{\{Q\}} \int_L e^{-p(z)} |f(z) - Q(z)|^2 dz = 0; \quad (6)$$

2) для любой функции  $f(z) \in C[p(z)]$

$$\inf_{\{Q\}} \max_{z \in L} e^{-p(z)} |f(z) - Q(z)| = 0, \quad (7)$$

где  $\{Q\}$  — всевозможные полиномы\*.

2°. Приведем обобщение теоремы 1 в случае, когда кривая  $L$ , на которой происходит аппроксимация, топологически эквивалентна всей оси  $(-\infty, +\infty)$ .

Пусть кривые  $C_+$  и  $C_-$ , лежащие в плоскости  $w$  ( $w = re^{i\theta}$ ), обе начинаются в точке  $w = 0$  и не имеют других общих точек.

Пусть  $\vartheta = \Phi_+(r)$ ,  $\vartheta = \Phi_-(r)$ ,  $a \leq r \leq \infty$ ,  $-\pi < \Phi_-(r) < \Phi_+(r) < \pi$ , суть, соответственно, уравнения кривых  $C_+$  и  $C_-$  в полярных координатах, причем функции  $\Phi_+(r)$ ,  $\Phi_-(r)$  непрерывны и дифференцируемы при  $r \geq r_0$ . Пусть на кривой  $L = C_+ + C_-$  задана вещественная непрерывная функция  $p(z) \in A[p_0(|z|)]$ . Как и в 1°, определим классы функций  $L_2[p(z)]$  и  $C[p(z)]$  на кривой  $L$ .

Теорема 2. Пусть сходятся интегралы

$$\int_0^{\infty} |d(r\Phi_+(r))|, \quad \int_0^{\infty} |d(r\Phi_-(r))| \quad (8)$$

и для  $\theta(r) = \Phi_+(r) - \Phi_-(r)$

$$0 < \lambda_1 < \liminf_{r \rightarrow \infty} \theta(r) \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \theta(r) < \lambda_2 < 2\pi. \quad (9)$$

Если

$$\int_0^{\infty} \frac{p_0(r)}{r} \exp \left[ -\pi \int_{r_1}^r \frac{du}{u \theta(u)} \right] dr = +\infty \quad (10)$$

и

$$\int_0^{\infty} \frac{p_0(r)}{r} \exp \left[ -\pi \int_{r_1}^r \frac{du}{u (2\pi - \theta(u))} \right] dr = +\infty, \quad (11)$$

то система полиномов полна на  $L$  в классах функций  $L_2[p(z)]$  и  $C[p(z)]$  в смысле (6) и (7), соответственно.

\* Утверждение (6) теоремы 1 содержится в нашей работе (1), а утверждение (7) является следствием утверждения (6), хотя и не было особо сформулировано нами в работе (1). В 1951 г. в работах С. Н. Бернштейна (2) и Л. Карлесона (3) другими методами результат теоремы 1 был установлен для того частного случая, когда приближение происходит на действительной оси  $(-\infty, +\infty)$ . При этом введенному в нашей работе (1) классу весовых функций  $e^{p(x)}$ ,  $p(x) \in A$ , С. Н. Бернштейном было дано название „нормально возрастающих“.

Из теоремы 2, в частности, следует:  
Следствие. Если для линии  $L$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \theta(r) = \frac{\pi}{\alpha} \quad \left( \frac{1}{2} < \alpha < +\infty \right),$$

при этом

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\left| \theta(r) - \frac{\pi}{\alpha} \right|}{r} dr < +\infty, \quad (12)$$

то система полиномов полна на  $L$  в классах функций  $L_2[p(z)]$  или  $C[p(z)]$  при условии

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{p_0(r)}{r^{1+\omega}} dr = +\infty, \quad \omega = \max \left\{ \alpha, \frac{\alpha}{2\alpha-1} \right\}. \quad (13)$$

3°. Пусть, как и выше, бесконечная кривая  $L$  топологически эквивалентна всей оси  $(-\infty, +\infty)$ , причем ее удаляющиеся в бесконечность ветви представимы непрерывными функциями

$$y = \Phi_+(x), \quad y = \Phi_-(x); \quad x \geq x_0; \quad \Phi_+(x) > \Phi_-(x).$$

Положим, кроме того, что при  $x \geq x_1 \geq x_0$  существуют непрерывные производные  $\Phi'_+(x)$  и  $\Phi'_-(x)$  и удовлетворяются условия

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Phi_+(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Phi_-(x)}{x} = 0; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi'_+(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi'_-(x) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Как и выше, определим на кривой  $L$  функцию  $p(z) \in A[p_0(|z|)]$  и классы функций  $L_2[p(z)]$  и  $C[p(z)]$ .

Обозначая  $\theta(x) = \Phi_+(x) - \Phi_-(x)$ , имеем теорему:

Теорема 3. Пусть сходятся интегралы

$$\int_{x_1}^{\infty} |d\Phi'_+(x)|, \quad \int_{x_1}^{\infty} |d\Phi'_-(x)|, \quad \int_{x_1}^{\infty} \frac{\Phi_+^2(x)}{\theta(x)} dx, \quad \int_{x_1}^{\infty} \frac{\Phi_-^2(x)}{\theta(x)} dx. \quad (15)$$

Если: а)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \inf \theta(x) > 0$  и функция  $p_0(r)$  удовлетворяет условию

$$\int_{r_1}^{\infty} p_0(r) \exp \left[ -\pi \int_{r_1}^r \frac{du}{\theta(u)} \right] \frac{dr}{\theta(r)} = +\infty, \quad (16)$$

а при б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \inf \theta(x) = 0$ , кроме (16), выполняется также дополнительное условие

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{p_0(r)} \int_{r_1}^r \frac{du}{u \theta(u)} = 0, \quad (17)$$

то система полиномов полна на  $L$  в классах функций  $L_2[p(z)]$  и  $C[p(z)]$ .

Наконец, отметим, что из теоремы 3 следует также  
 Теорема 4. Если кривая  $L$  представляет собой границу полосы или полуполосы ширины  $\Delta$ , то при условии

$$\int_0^{\infty} p_0(r) e^{-\frac{\pi}{\Delta} r} dr = +\infty \quad (18)$$

система полиномов полна на  $L$  в классах  $L_2[p(z)]$  и  $C[p(z)]$ .

В заключение отметим, что, используя метод А. Л. Шагиняна <sup>(5)</sup>, можно установить:

Теорема 5. Если для произвольной вещественной функции  $p(z) \leq p_0(|z|)$ , определенной на данной кривой, сходятся: а) интеграл (5) теоремы 1; б) хоть один из интегралов (10) и (11) теоремы 2; в) интеграл (13) следствия теоремы 2; г) интеграл (16) теоремы 3; д) интеграл (18) теоремы 4, то в условиях соответствующих теорем можно указать кривые, на которых полнота не будет иметь места в обоих классах функций  $L_2[p(z)]$  и  $C[p(z)]$ .

Сектор математики  
 Академии наук Арм.ССР

Поступило  
 1 VII 1954

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> М. М. Джрбашян, Докл. АН Арм.ССР, 7, № 1 (1947). <sup>2</sup> С. Н. Бернштейн, ДАН, 77, № 4 (1951); 85, № 2 (1952). <sup>3</sup> L. Carleson, Proc. Am. Math. Soc., 2 (1951). <sup>4</sup> М. М. Джрбашян, ДАН, 66, № 6 (1949); 67, № 1 (1949). <sup>5</sup> А. Л. Шагинян, Докл. АН Арм.ССР, 5, № 4 (1946); Сообщ. Инст. матем. и мех. АН Арм.ССР, в. 1 (1947).